

**Eine Untersuchung
stromabwärts induzierter Effekte
extratropischer Umwandlungssysteme
mit Hilfe von
Q-Vektor-Partitionierung**

Diplomarbeit
im
Studiengang Meteorologie

von

Sven Eiermann

am Institut für Physik der Atmosphäre
im Fachbereich 08: Physik, Mathematik und Informatik
der



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Erstgutachter:
Zweitgutachter:

Univ.-Prof. Dr. Volkmar Wirth
Dr. Michael Riemer

Abgabedatum: 12. Juni 2012

Erklärung

Hiermit versichere ich durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe, dass alle Stellen, die wörtlich oder dem Sinn nach auf Publikationen oder Vorträgen anderer Autoren beruhen, als solche kenntlich gemacht sind und dass die vorliegende Arbeit bisher keiner anderen Prüfungsbehörde in gleicher oder ähnlicher Form vorgelegt wurde.

Mainz, den 12. Juni 2012



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Sven Martin Eiermann
Lucy-Hillebrand-Straße 16 (7001-2)
55128 Mainz
Geboren am 30. Juli 1984 in Gießen
Matrikelnummer: **2641018**
Email: sven.eiermann@gmail.com

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Der Zusammenhang von Zyklonogenese und Vertikalbewegung	5
2.1.1	Energieumwandlung und Dynamik bei der Zyklonogenese	5
2.1.2	Das Phänomen Luftmassenentfernung aus einer Luftsäule	6
2.1.3	Das Phänomen Wirbelstreckung	7
2.2	Zyklonogenese in Zusammenhang mit einem Höhentrog	9
2.3	Zyklonogenese in Zusammenhang mit einem Jetstreak	12
2.4	Der Shapiro-Effekt	13
2.5	Q-Vektor und Omega-Gleichung	14
2.6	Aufteilung des Q-Vektors	15
2.7	Die Alternative Balance	21
2.7.1	Herleitung unter ausschließlicher Verwendung der Konvertierungsformeln aus <i>Davies-Jones</i> (1991)	24
2.7.2	AB-Omega-Gleichung nach <i>Mallet et al.</i> (1999)	27
2.7.2.1	Thermische Windbeziehung	27
2.7.2.2	Skizze der Herleitung	27
3	Methodik	29
3.1	Implementierung der Aufteilung von <i>Jusem & Atlas</i> (1998)	29
3.2	Die verwendeten Daten	31
3.2.1	Die Entwicklung in dem numerischen Experiment aus <i>Riemer et al.</i> (2008)	31
3.2.2	Für die Inversion der Omega-Gleichung benötigte Daten	34
3.3	Numerische Inversion der Omega-Gleichung	34
4	Ergebnisse	35
4.1	Die allgemeine Entwicklung der stromabwärts induzierten Zyklone	35
4.2	Vergleich mit Modell-Vertikalbewegung	43
4.3	Wahl der Version der Omega-Gleichung mit Alternativer Balance	49
4.4	Die vertikale Struktur der Vertikalbewegung	53
4.5	Aus oberer Troposphäre forcierte Entwicklung	65
4.6	Die partitionierte Vertikalbewegung	70
4.6.1	Entstehungsphase	70
4.6.2	Intensivierungsphase	71
4.6.2.1	Auftreten des Shapiro-Effekts	81

4.7	Untersuchung des Anteils der Komponenten	85
4.7.1	Graphische Auswertung	85
4.7.2	Betrachtung der Mittelwerte und Fazit	94
4.7.2.1	Entstehungsphase	94
4.7.2.2	Intensivierungsphase	95
4.7.2.3	Graphische Darstellung	96
4.7.2.4	Abschließendes Fazit	96
5	Zusammenfassung und Ausblick	97
5.1	Zusammenfassung	97
5.2	Ausblick	98
Anhang A:		
	Beschreibung der numerischen Inversion der Omega-Gleichung	99
A.1	Zentrierte Differenzen	99
A.2	Die Omega-Gleichung in zentrierten Differenzen	100
A.3	Vorfaktoren	101
A.3.1	Omega-Gleichung mit ausschließlich vom Druck abhängiger statischer Stabilität	102
A.3.2	Omega-Gleichung mit von allen Ortskoordinaten abhängiger statischer Stabilität	103
A.3.3	Omega-Gleichung mit lokaler statischer Stabilität mit Formeln aus <i>Davies-Jones</i> (1991) in Druckkoordinaten konvertiert . . .	104
A.3.4	Omega-Gleichung mit lokaler statischer Stabilität und Alter- nativer Balance nach <i>Mallet et al.</i> (1999)	105
A.4	Inversion der Omega-Gleichung mit sukzessiver Überrelaxation	106
Anhang B:		
	Mögliche Unstimmigkeiten in <i>Jusem & Atlas</i> (1998, S. 2184)	109
B.1	Erste mögliche Unstimmigkeit	109
B.2	Zweite mögliche Unstimmigkeit	110
B.3	Möglicher Druckfehler in Gleichung (B24)	110
	Literatur	111

Abbildungsverzeichnis

1.1	Zwei-Stadien-Klassifikation von ET mit Abbildung 11 aus <i>Jones et al.</i> (2003) als Vorlage	3
2.1	Divergenz und Konvergenz in einer Luftsäule (schematisch)	8
2.2	Wirbelstreckung (schematisch)	8
2.3	Ageostrophischer Windvektor auf einer Trogvorderseite (schematisch)	10
2.4	Modifizierte Abbildung 6 (A) aus <i>Uccellini & Johnson (1979)</i>	13
2.5	Einheitsvektoren in Isentropen-System	16
2.6	Einheitsvektoren in Isohypsen-System	16
2.7	Abbildung 1 aus <i>Jusem & Atlas (1998)</i>	20
3.1	Abbildung 2 aus <i>Riemer et al. (2008)</i>	32
3.2	Abbildung 5 aus <i>Riemer et al. (2008)</i>	33
4.1	Vertikalbewegung bei $t = 132$ h und $t = 144$ h	38
4.2	Vertikalbewegung bei $t = 156$ h und $t = 168$ h	39
4.3	Vertikalbewegung in Stromabwärts-Gebiet bei $t = 132$ h und $t = 144$ h	40
4.4	Vertikalbewegung in Stromabwärts-Gebiet bei $t = 156$ h und $t = 168$ h	41
4.5	Vergleich mit Modell-Vertikalbewegung bei $t = 132$ h	44
4.6	Vergleich mit Modell-Vertikalbewegung bei $t = 144$ h	45
4.7	Vergleich mit Modell-Vertikalbewegung bei $t = 156$ h	46
4.8	Vergleich mit Modell-Vertikalbewegung bei $t = 168$ h	47
4.9	Vertikalbewegung mit AB nach Konvertierungsformeln aus <i>Davies-Jones (1991)</i> in Stromabwärts-Gebiet bei $t = 132$ h und $t = 144$ h	50
4.10	Vertikalbewegung mit AB nach <i>Mallet et al. (1999)</i> in Stromabwärts-Gebiet bei $t = 132$ h und $t = 144$ h	51
4.11	Vertikalschnitt der Vertikalbewegung bei $t = 132$ h und $t = 144$ h . . .	54

4.12	Vertikalschnitt der Vertikalbewegung bei $t = 156$ h und $t = 168$ h . . .	55
4.13	Vertikalbewegung auf 720 hPa und 620 hPa bei $t = 132$ h	56
4.14	Vertikalbewegung auf 520 hPa und 420 hPa bei $t = 132$ h	57
4.15	Vertikalbewegung auf 720 hPa und 620 hPa bei $t = 144$ h	58
4.16	Vertikalbewegung auf 520 hPa und 420 hPa bei $t = 144$ h	59
4.17	Vertikalbewegung auf 720 hPa und 620 hPa bei $t = 156$ h	60
4.18	Vertikalbewegung auf 520 hPa und 420 hPa bei $t = 156$ h	61
4.19	Vertikalbewegung auf 720 hPa und 620 hPa bei $t = 168$ h	62
4.20	Vertikalbewegung auf 520 hPa und 420 hPa bei $t = 168$ h	63
4.21	Vergleich zwischen von oben und von unten forcierter Vertikalbewegung bei $t = 132$ h	66
4.22	Vergleich zwischen von oben und von unten forcierte dynamischer Vertikalbewegung bei $t = 144$ h	67
4.23	Vergleich zwischen von oben und von unten forcierter Vertikalbewegung bei $t = 156$ h	68
4.24	Vergleich zwischen von oben und von unten forcierter Vertikalbewegung bei $t = 168$ h	69
4.25	Gesamte Vertikalbewegung und Stretching-Komponente bei $t = 132$ h	72
4.26	Curvature-Komponente und Shearadvection-Komponente bei $t = 132$ h	73
4.27	Gesamte Vertikalbewegung und Stretching-Komponente bei $t = 144$ h	74
4.28	Curvature-Komponente und Shearadvection-Komponente bei $t = 144$ h	75
4.29	Gesamte Vertikalbewegung und Stretching-Komponente bei $t = 156$ h	76
4.30	Curvature-Komponente und Shearadvection-Komponente bei $t = 156$ h	77
4.31	Gesamte Vertikalbewegung und Stretching-Komponente bei $t = 168$ h	78
4.32	Curvature-Komponente und Shearadvection-Komponente bei $t = 168$ h	79
4.33	Temperaturadvektion auf Höhe des Jetstreaks bei $t = 132$ h und $t = 144$ h	82
4.34	Temperaturadvektion auf Höhe des Jetstreaks bei $t = 156$ h und $t = 168$ h	83
4.35	Curvature-Komponente und Summe aus Shearadvection-Komponente und Stretsching-Komponente bei $t = 132$ h	86
4.36	Verhältnisse der Komponenten zur gesamten Vertikalbewegung bei $t = 132$ h.	87
4.37	Curvature-Komponente und Summe aus Shearadvection-Komponente und Stretsching-Komponente bei $t = 144$ h	88

4.38	Verhältnisse der Komponenten zur gesamten Vertikalbewegung bei $t = 144$ h.	89
4.39	Curvature-Komponente und Summe aus Shearadvection-Komponente und Stretsching-Komponente bei $t = 156$ h	90
4.40	Verhältnisse der Komponenten zur gesamten Vertikalbewegung bei $t = 156$ h.	91
4.41	Curvature-Komponente und Summe aus Shearadvection-Komponente und Stretsching-Komponente bei $t = 168$ h	92
4.42	Verhältnisse der Komponenten zur gesamten Vertikalbewegung bei $t = 168$ h.	93
4.43	Graphische Darstellung der mittleren Verhältnisse des Beitrags von Jetstreak und Höhentrog zur gesamten Vertikalbewegung	96

Tabellenverzeichnis

4.1	Erste Einschätzung	84
4.2	Gemittelte Verhältnisse	95
A.1	Vorfaktoren der Omega-Gleichung (Indexzuordnung)	101
A.2	Vorfaktoren der Omega-Gleichung für ausschließlich vom Druck abhängige statische Stabilität	102
A.3	Vorfaktoren der Omega-Gleichung für von allen Ortskoordinaten abhängige statische Stabilität	103
A.4	Vorfaktoren der Omega-Gleichung mit Formeln aus <i>Davies-Jones</i> (1991) in Druckkoordinaten konvertiert	104
A.5	Vorfaktoren der Omega-Gleichung mit AB nach <i>Mallet et al.</i> (1999) .	105

1. Einleitung

Etwa die Hälfte aller tropischen Wirbelstürme im Nordpazifik und im Atlantik verwandeln sich am Ende ihrer Lebenszeit zu Tiefdrucksystemen in den mittleren Breiten. Den Prozess, in dessen Rahmen dies geschieht, nennt man außertropische Umwandlung (*engl.*: extratropical transition – ET). Gerade wegen seines Potentials, in den mittleren Breiten starke Niederschläge und orkanartige Winde zu verursachen, ist ET schon seit einiger Zeit Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen. *Klein et al.* (2000) untersuchten ET-Ereignisse über dem westlichen Nord-Pazifik mit Hilfe von Infrarot-Satellitenbildern und fanden dabei heraus, dass sich der Wirbelsturm in beinahe allen Fällen in ähnlicher Weise in eine barokline extratropische Zyklone umwandelt. Basierend auf einer Klassifikation von *Klein et al.* (2000), wurde in *Jones et al.* (2003) der ET-Prozess in zwei Stadien aufgeteilt. Er beginnt demnach mit dem Umwandlungs-Stadium, in dem sich ein tropischer Wirbelsturm (*engl.*: tropical cyclone – TC) vom Äquator weg in Richtung Pol bewegt, wodurch er von den damit verbundenen Veränderungen des Zustands seiner Umgebung beeinflusst wird. Sofern der TC nicht in den Tropen zerfällt, gelangt er in das zweite ET-Stadium, das als extratropisches Stadium bezeichnet wird. In diesem wechselwirkt er in den Extratropen mit seiner Umgebung und entwickelt sich – sofern er nicht zerfällt – zu einem extratropischen Tiefdrucksystem. Diese 2-Stadien-Klassifikation ist im Detail schematisch in der Abbildung 1.1 gezeigt, welche der Abb. 11 aus *Jones et al.* (2003) nachempfunden wurde.

Ein ET-Ereignis hat, sofern es in das extratropische Stadium eintritt, in der Regel einen starken Einfluss auf die Strömung der mittleren Breiten. Dazu gehört die Begünstigung der Entwicklung eines Rückens durch Advektion von Luftmassen mit geringer potentieller Vorticity (PV, *Ertel* (1942)) unmittelbar stromabwärts des ET-Systems und die damit verbundene Anregung eines Rossby-Wellenzuges (*Bosart & Lackmann*, 1995; *Riemer et al.*, 2008; *Torn*, 2010). Ein weiterer häufig beobachteter Effekt von ET auf die Strömungsverhältnisse stromabwärts ist die Herausbildung eines Jetstreaks¹ aufgrund der Wechselwirkung der aus dem Sturm ausfließenden Luft mit dem Strahlstrom (*Jones et al.*, 2003; *Riemer et al.*, 2008; *Riemer & Jones*, 2010).

¹Als Jetstreak bezeichnet man ein lokales Windmaximum im Strahlstrom.

Auch auf die Vorhersagbarkeit des Wettergeschehens wirkt sich ET aus. So deuten Studien auf eine verringerte Vorhersagbarkeit während ET – nicht nur in unmittelbarer Nähe des ET-Systems, sondern mit fortschreitender Entwicklung auch weiter stromabwärts – hin (*Harr et al.*, 2006, 2008).

In der Studie von *Riemer et al.* (2008) wurde mit Hilfe eines numerischen Experiments die Wechselwirkung eines ET-Systems mit einem geraden Jet anhand eines idealisierten Szenarios untersucht. Durch diese Wechselwirkung kam es in dem Experiment zur Bildung eines Jetstreaks und eines Rücken-Trog-Paares unmittelbar stromabwärts des ET-Systems. Darüber hinaus zeigte sich eine rasche Zyklogenese in der linken Ausgangsregion des Jetstreaks und im weiteren Verlauf eine zunehmende Ausbreitung des Rücken-Trog-Musters, welches eine Familie von weiteren Zyklonen auslöste.

Zusätzlich zu den oben genannten Prozessen können auch diabatische Prozesse eine nicht zu vernachlässigende Rolle bei ET spielen. So kann beispielsweise die Freisetzung latenter Wärme zu einer Veränderung der Jet-Struktur führen (*Atallah & Bosart*, 2003). Auch die bei ET häufiger auftretende explosive Zyklogenese (*Hoskins & Berrisford*, 1988) wird in ihrem Verlauf signifikant von diabatischen Prozessen beeinflusst. Die Freisetzung latenter Wärme in sich rasant verstärkenden Zyklonen spielt eine entscheidende Rolle in ihrer Entwicklung (*Martin*, 2006, Kapitel 8.5).

Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel, den Einfluss eines extratropischen Umwandlungsprozesses auf der synoptischen Skala im Hinblick auf die Frage nach der Bedeutung von Jetstreak einerseits und Höhentrog andererseits für die stromabwärts induzierte Zyklogenese vergleichend zu untersuchen, indem der Zusammenhang zwischen Vertikalbewegung und Zyklogenese ausgenutzt wird.

Dabei wird eine Aufteilung des Q-Vektors in vier verschiedene Anteile vorgenommen (*Jusem & Atlas*, 1998), die jeweils mit einem der beiden oben genannten Phänomene (Höhentrog und Jetstreak) in Verbindung gebracht werden können.

Durch diese Aufteilung kann die Omega-Gleichung für jeden Anteil einzeln invertiert werden, wodurch man den beiden Phänomenen jeweils auch einen Anteil an der Vertikalbewegung, welche hier als Indikator für Zyklogenese verwendet wird, zuordnen kann. Die Linearität des Differentialoperators in der Omega-Gleichung ermöglicht es, diese einzelnen Anteile an der Vertikalbewegung nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ miteinander zu vergleichen.

Die in dieser Arbeit über die Omega-Gleichung bestimmte (partitionierte) Vertikalbewegung berücksichtigt nicht die diabatischen Prozesse bei der stromabwärts von ET induzierten Zyklogenese. Durch einen Vergleich mit der Vertikalbewegung aus dem verwendeten Modell wird aber im Verlauf dieser Arbeit gezeigt, dass diese Einschränkung sich nicht erheblich auf die Interpretationswürdigkeit der in dieser Arbeit verwendeten (partitionierten) Vertikalbewegung auswirkt.

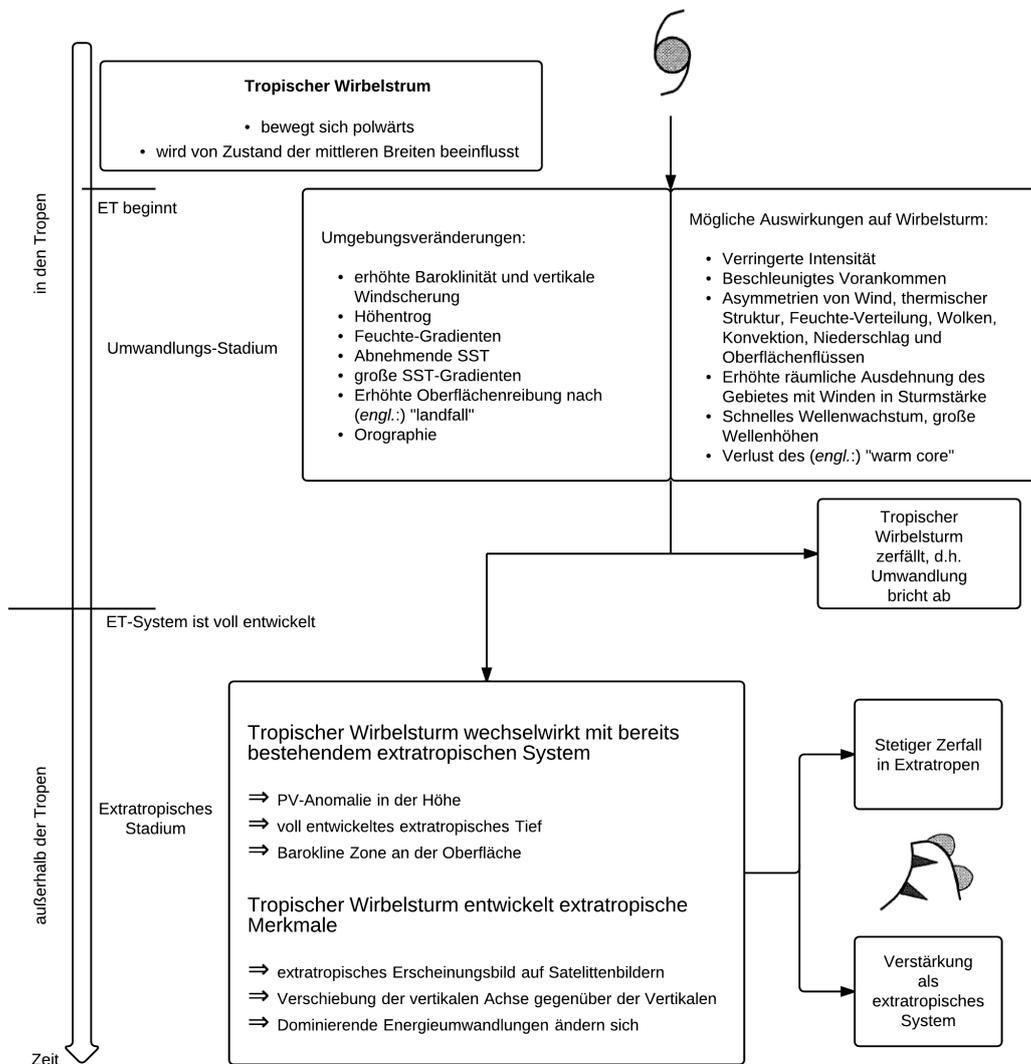


Abbildung 1.1: Auf einer Klassifikation von *Klein et al.* (2000) basierende Zwei-Stadien-Klassifikation extratropischer Umwandlung. Die Abbildung ist – abgesehen von leichter Veränderung der Art der Darstellung und freier Übersetzung des Textes vom Englischen ins Deutsche – identisch mit Abbildung 11 aus *Jones et al.* (2003), welche als Vorlage benutzt wurde. Die Beschriftungen “in den Tropen” und “außerhalb der Tropen” beziehen sich näherungsweise auf die in operationellen Vorhersage-Zentralen gebräuchlichen Verwendungen dieser Formulierungen.

2. Grundlagen

In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit relevanten Grundlagen behandelt. Da die Untersuchung der stromabwärts von ET induzierten Zyklogenese mit Hilfe der Vertikalbewegung untersucht werden soll, wird zuerst der allgemeine Zusammenhang zwischen Zyklogenese und Vertikalbewegung besprochen. Da das zentrale Ziel dieser Arbeit die vergleichende Bewertung des Einflusses auf die Zyklogenese von Jetstreak einerseits und Höhentrog andererseits ist, wird zusätzlich begründet, warum beide Einflüsse durch Vertikalbewegung identifiziert und quantifiziert werden können. Außerdem wird noch auf den sogenannten Shapiro-Effekt eingegangen, der ebenfalls durch die Q-Vektor-Aufteilung nach Jusem & Atlas (1998) untersucht werden kann. Danach wird die Q-Vektor-Form der Omega-Gleichung angegeben, bevor die Aufteilung des Q-Vektors erklärt wird. Abschließend wird die in dieser Arbeit verwendete Alternative Balance sowie die Motivation für ihre Verwendung erläutert.

2.1 Der Zusammenhang von Zyklogenese und Vertikalbewegung

Die Zyklogenese in den mittleren Breiten steht in engem Zusammenhang mit Vertikalbewegung in der Troposphäre. Dieser Zusammenhang soll im Folgenden erläutert werden. Dabei wird auf die beiden für Zyklogenese charakteristischen Phänomene 'Bodendruckabnahme durch Luftmassenentfernung' und 'Wirbelstreckung' eingegangen und gezeigt, aus welchem Grund diese eng mit Vertikalbewegung zusammenhängen.

2.1.1 Energieumwandlung und Dynamik bei der Zyklogenese

Von grundlegender Bedeutung bei der extratropischen Zyklogenese ist die Umwandlung von verfügbarer potentieller Energie (*engl.*: available potential energy - APE) der großskaligen Strömung in kinetische Energie zu Gunsten der sich verstärkenden Zyklone (siehe *Wirth*, 2007, Kapitel: 'Baroclinic instability and cyclogenesis'). Diese

Umwandlung ist mit einer Absenkung des Schwerpunkts der beteiligten Luftmasse verbunden. Deshalb muss die dreidimensionale Strömung innerhalb der sich entwickelnden Zyklone so organisiert sein, dass im Mittel die kühlere Luft absinkt und die wärmere Luft aufsteigt. Die Zyklogese wird dabei in der Regel noch durch das Freiwerden latenter Wärme in feuchten aufsteigenden Luftströmungen verstärkt.

2.1.2 Das Phänomen Luftmassenentfernung aus einer Luftsäule

Ein Merkmal von Zyklogese ist eine negative Bodendrucktendenz, also ein mit der Zeit abnehmender Bodendruck. Die Abbildung 2.1 zeigt schematisch eine zylinderförmige Luftsäule, welche sich in der Troposphäre vom Boden bis zur Tropopause erstreckt und in der an der Tropopause Divergenz herrscht, welche gegenüber der am Boden herrschenden Konvergenz überwiegt. Am Boden solch einer Luftsäule fällt der Luftdruck p in der Regel mit der Zeit t , wie man an folgender Näherungsformel erkennt, die auf eine Arbeit von Max Margules aus dem Jahr 1904 zurückgeht (*Margules, 1904*):

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} \approx - \int_0^{p_0} (\nabla_p \cdot \mathbf{v}) dp \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet p_0 den Bodendruck, $\mathbf{v} = (u, v)$ den horizontalen Windvektor¹ und p den Luftdruck.

∇_p ist der quasi-horizontale Nabla-Operator, d.h.:

$$\nabla_p = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{p=const} . \quad (2.2)$$

Die Näherungs-Formel für die Bodendruck-Tendenz nach Margules beruht auf der Interpretation des Bodenluftdrucks als Gewichtskraft aller sich in der Erdatmosphäre befindlichen Luftmoleküle in der über dem Boden liegenden Luftsäule geteilt durch die Bodenfläche der Säule. Da sich in der Troposphäre etwa 80% der Masse der gesamten Erdatmosphäre befindet, kann man die Gleichung (2.1) auch gut auf die Luftsäule aus Abbildung 2.1 anwenden, wobei die untere Integrationsgrenze dann nicht Null hPa ist, sondern der Luftdruck in Troposphärenhöhe.

Der Bodendruck in der Luftsäule aus Abbildung 2.1 fällt also, weil die Netto-Divergenz in der Luftsäule positiv ist und somit Luftmasse aus ihr entfernt wird. Aus Kontinuitätsgründen muss die Luft in diesem Fall vom Boden in Richtung Troposphäre nachströmen, weshalb innerhalb der Luftsäule die Luft aufsteigt. In isobaren Koordinaten und unter der Annahme der Inkompressibilität der Luft lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (2.3)$$

¹Generell werden in dieser Arbeit Vektoren mit zwei Komponenten, wenn nicht anders angegeben, in dem gewöhnlichen kartesischen Koordinatensystem mit der zonalen x-Achse und der meridionalen y-Achse geschrieben.

Dabei ist $\omega \equiv \frac{Dp}{Dt}$ die Vertikalgeschwindigkeit in Druckkoordinaten, wobei mit D/Dt die zeitliche Ableitung, der Strömung folgend (auch materielle Ableitung genannt), bezeichnet wird. Folglich gilt für den Fall aufsteigender Luft $\omega < 0$ und für den Fall absinkender Luft $\omega > 0$.

Nimmt man bei der Luftsäule aus Abbildung 2.1 an, dass die Vertikalgeschwindigkeit wegen der natürlichen Barrieren Erdboden und Troposphäre am unteren und oberen Rand gleich Null ist und dass die Konvergenz am Boden kontinuierlich in die Divergenz in Tropopausenhöhe übergeht, dann ergibt sich aus Gleichung (2.3) zwangsläufig, dass die Aufwärtsbewegung in der mittleren Troposphäre – genauer gesagt in *der* Höhe, wo weder Konvergenz noch Divergenz vorliegt – am größten ist. In der realen Troposphäre ist im Allgemeinen tatsächlich der Betrag der Vertikalgeschwindigkeit in der mittleren Troposphäre am größten.

2.1.3 Das Phänomen Wirbelstreckung

Neben einer negativen Bodendrucktendenz ist die Entstehung eines zyklonalen Windfelds ein weiteres Merkmal von Zyklrogenese.

Außerhalb der Tropen ist die Abweichung des Horizontalwinds $\mathbf{v} = (u, v)$ vom geostrophischen Wind $\mathbf{v}_g = (u_g, v_g)$ auf der synoptischen nicht sehr groß. Der geostrophische Wind kann folgendermaßen definiert werden:

$$\mathbf{v}_g \equiv f_0^{-1} \mathbf{k} \times \nabla_p \Phi. \quad (2.4)$$

Dabei ist \mathbf{k} der vertikale Einheitsvektor, $\Phi = \int_0^z g(z) dz$ das Geopotential, wobei $g(z) \approx 9,81 \text{ m s}^{-2}$ die Erdbeschleunigung und z die Höhe über dem Meeresspiegel in Metern ist. Die Konstante $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$ ist der Coriolis-Parameter für eine konstante geographische Breite ϕ_0 und mit der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation $\Omega \approx 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$. Mit $\phi_0 = 45^\circ$ erhält man $f_0 \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Der so definierte geostrophische Wind ist wegen der räumlichen Konstanz von f_0 divergenzfrei. Die Differenz zwischen dem tatsächlichen Wind und dem geostrophischen Wind wird als ageostrophischer Wind $\mathbf{v}_a = (u_a, v_a)$ bezeichnet, d.h. $\mathbf{v}_a = \mathbf{v} - \mathbf{v}_g$. Der ageostrophische Wind ist im Allgemeinen nicht divergenzfrei.

Der Zusammenhang der Entstehung eines solchen zyklonalen Windfelds mit Vertikalbewegung lässt sich gut erkennen, indem man sich die zeitliche Entwicklung der Rotation des so definierten geostrophischen Windfelds relativ zu einem festen Punkt auf der Erdoberfläche, der relativen geostrophischen Vorticity $\zeta_g = f_0^{-1} \nabla_p^2 \Phi$, anschaut.

Für diese gilt:

$$\frac{D_g \zeta_g}{Dt} \approx f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad (2.5)$$

wobei mit $D_g/Dt = \partial/\partial t + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}$ die zeitliche Ableitung, der *geostrophischen* Strömung folgend, bezeichnet wird.

An Gleichung (2.5) erkennt man, dass beispielsweise eine Aufwärtsbewegung, welche vom Boden bis zur mittleren Troposphäre kontinuierlich stärker wird, im Allgemeinen eine zeitliche Zunahme der relativen geostrophischen Vorticity in der unteren

Troposphäre zur Folge hat. Dieses Phänomen bezeichnet man als Wirbelstreckung und es ist, so wie auch das Phänomen Luftmassenentfernung aus einer Luftsäule, mit Vertikalbewegung verbunden. Generell hat also eine in der mittleren Troposphäre herrschende Aufwärtsbewegung die Entstehung eines zyklonalen Windfelds in der unteren Troposphäre zur Folge. Dementsprechend hat eine in der mittleren Troposphäre herrschende Abwärtsbewegung generell die Entstehung eines antizyklonalen Windfelds in der unteren Troposphäre zur Folge.

Die Entstehung eines zyklonalen Windfelds durch Wirbelstreckung ist in Abbildung 2.2 schematisch dargestellt.

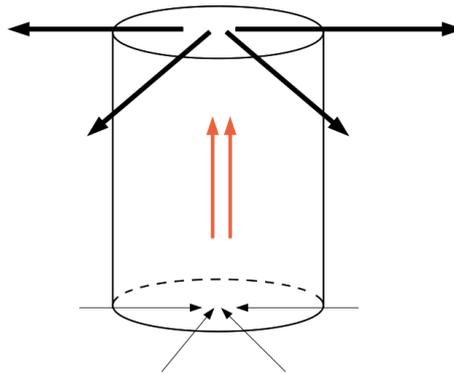


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung stärkerer Divergenz (angedeutet durch dicke Pfeile) am oberen Rand und schwächerer Konvergenz (angedeutet durch dünne Pfeile) am unteren Rand einer Luftsäule. Es kommt zu Aufwärtsbewegung innerhalb der Luftsäule (orangene Pfeile), und durch die Luftmassenentfernung fällt der Luftdruck am unteren Rand der Luftsäule.

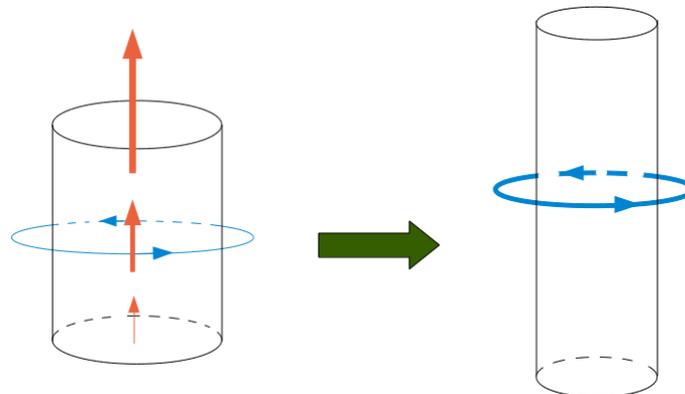


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Wirbelstreckung. Durch die Zunahme der Aufwärtsbewegung mit der Höhe (orangene Pfeile, links) ist die relative Vorticity (Rotation in blau angedeutet) zu einem späteren Zeitpunkt (rechts) größer.

2.2 Zyklogenese in Zusammenhang mit einem Höhentrog

Ein typischer Vorläufer der Zyklogenese in den mittleren Breiten ist ein Höhentrog. Zur Definition eines Höhentrogs sei hier der erste Satz aus dem entsprechenden Eintrag im Wetterlexikon des *Deutschen Wetterdienstes* (DWD, 2012) zitiert:

„In der Meteorologie wird die Bezeichnung ”Höhentrog” für ein Gebilde tiefen Luftdrucks in höheren Troposphärenschichten (abgesenkte Luftdruckflächen) verwendet.“

Ein Höhentrog ist aber kein *abgeschlossenes* Gebiet mit relativ niedrigem Luftdruck, sondern vielmehr eine Art wellenförmige Ausbuchtung im Druckfeld.

Wegen der abgesenkten Druckflächen innerhalb eines Höhentrogs kann man ihn auf einer Druckfläche anhand eines Gebiets niedrigeren Geopotentials identifizieren.

In Abbildung 2.3 ist ein Teil eines idealisierten Höhentrogs sowie, im rechten Teil der Abbildung, der westliche Teil eines sich anschließenden Höhenrückens – dem entsprechenden Gegenstück zu einem Höhentrog – auf einer gedachten Druckfläche in der oberen Troposphäre, zum Beispiel mit $p = 300$ hPa, schematisch dargestellt, wobei drei Linien jeweils gleichen Geopotentials, sogenannte Isohypsen, eingezeichnet sind. In diesem Höhentrog soll die Geschwindigkeit des geostrophischen Windes überall gleich groß sein. Dabei sind an drei verschiedenen Punkten – bezeichnet mit A, B und C – jeweils schematisch die Windvektoren des geostrophischen Windes als schwarze Pfeile und die zeitliche Änderung des geostrophischen Windes der geostrophischen Stömung folgend $D_g \mathbf{v}_g / D t$ als blaue Pfeile dargestellt. Zusätzlich sind als rote Pfeile schematisch die Vektoren des ageostrophischen Windes an den drei Punkten dargestellt. Die Richtung und den Betrag des geostrophischen Windvektors kann man über folgende Gleichung (vergleiche *Holton*, 2004, Kapitel 6, Gleichung (6.11)) abschätzen:

$$\frac{D_g \mathbf{v}_g}{D t} = -f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a. \quad (2.6)$$

Die Krümmung der Isohypsen in Abbildung 2.3 ist an Punkt A am stärksten. Deshalb ist auch die Richtungsänderung von \mathbf{v}_g der Strömung folgend, also $D_g \mathbf{v}_g / D t$ nach Gleichung (2.6) an Punkt A am größten. Sie zeigt in Strömungsrichtung gesehen zwischen den Punkten A und B in Abbildung 2.3 stets in die der Strömungsrichtung entgegengesetzte Richtung und ist an Punkt B kleiner als an Punkt A, da hier die Richtungsänderung von \mathbf{v}_g der Strömung folgend nicht mehr so groß ist. An Punkt C hingegen ist die Strömung nicht mehr zyklonal sondern bereits antizyklonal, d.h. der geostrophische Wind wird hier nach rechts beschleunigt. Deshalb zeigt hier der ageostrophische Windvektor in Strömungsrichtung. Nach Gleichung (2.6) zeigt der ageostrophische Windvektor \mathbf{v}_a in Abbildung 2.3 zwischen den Punkten A und B in die entgegengesetzte Richtung von \mathbf{v}_g und sein Betrag ist an Punkt A größer als an Punkt B. An Punkt C ist sein Betrag auch größer als an Punkt B, dort zeigt \mathbf{v}_a in die gleiche Richtung wie \mathbf{v}_g . Daraus ergibt sich unmittelbar, dass zwischen den Punkten A und C, also auf der Trogvorderseite, das Windfeld divergent ist, weil die

gesamte Divergenz des Windfeldes wegen der angenommenen räumlichen Konstanz des Coriolis-Parameters in \mathbf{v}_a enthalten ist. Außerdem kann man aus obiger Überlegung folgern, dass diese Divergenz dort am größten ist, wo die Krümmung der Isohypsen gleich Null ist. Das ist in Abbildung 2.3 etwa auf halber Strecke zwischen Punkt A und Punkt C der Fall.

So kann man erklären, dass ein Höhentrog in der Regel mit Divergenz in der oberen Troposphäre auf seiner Vorderseite verbunden ist. Diese Divergenz begünstigt außerdem durch den mit ihr verbundenen Luftmassenentzug Aufsteigen in der unter der Trogvorderseite liegenden Troposphäre.

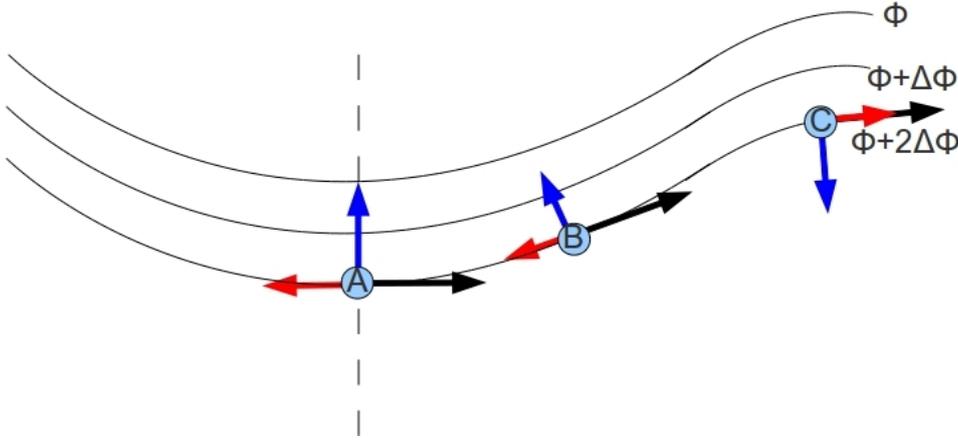


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung eines Höhentrogs und eines Teils des nächsten stromabwärts gelegenen Höhenrückens. Die dünnen durchgezogenen Linien stellen Isohypsen dar. An drei verschiedenen Punkten sind jeweils schematisch die Vektoren \mathbf{v}_g (schwarze Pfeile), $D_g \mathbf{v}_g / Dt$ (blaue Pfeile) und \mathbf{v}_a (rote Pfeile) eingezeichnet. Die gestrichelte Linie kennzeichnet die Trogvorderseite.

Dass ein Höhentrog Aufsteigen in der Troposphäre auf seiner Vorderseite begünstigt, kann auch mit Hilfe der sogenannten traditionellen Omega-Gleichung² (zur Herleitung siehe *Holton, 2004*, Kapitel 6, Abschnitt 6.4) veranschaulicht werden. Diese lautet unter Vernachlässigung diabatischer Prozesse (vergleiche *Holton, 2004*, Gleichung (6.34)):

$$\left(\nabla_p^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = - \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} [-\mathbf{v}_g \cdot \nabla_p \zeta_g] - \frac{1}{\sigma} \frac{R}{p} \nabla_p^2 [-\mathbf{v}_g \cdot \nabla_p T], \quad (2.7)$$

wobei $R = 287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ die spezifische Gaskonstante von trockener Luft und T die Lufttemperatur in Kelvin ist. $\sigma = -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$ ist die statische Stabilität, in welche die potentielle Temperatur $\theta = T \left(\frac{p_s}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$ mit der spezifischen Wärmekapazität trockener Luft bei konstantem Druck $c_p \approx 1004 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ und einem üblicherweise

²Diese Form der Omega-Gleichung ist insofern traditionell, als dass sie sich von der neueren Q-Vektor-Form (siehe Abschnitt 2.5) formal unterscheidet.

auf 1000 hPa gesetzten Referenzluftdruck p_s sowie das spezifische Volumen $\alpha = \frac{RT}{p}$ eingehen.

Im ersten Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.7) steht in den eckigen Klammern die Vorticity-Advektion und im zweiten Term auf der rechten Seite steht in den eckigen Klammern die Temperatur-Advektion. Der gesamte Antrieb für die Vertikalbewegung in Gleichung (2.7), d.h. die rechte Seite der Gleichung, setzt sich aus der über f_0/σ skalierten differentiellen Vorticity-Advektion³ (erster Term) und dem über σ^{-1} skalierten auf die Temperatur-Advektion angewendeten quasi-horizontalen Laplace-Operator (zweiter Term) zusammen. Die differentielle Vorticity-Advektion ist auf einer Trogvorderseite generell recht groß. Das liegt zum einen daran, dass ein Höhentrog im allgemeinen mit einem relativen Maximum relativer Vorticity in der Höhe verbunden ist. Zum anderen nimmt der geostrophische Wind, wegen der thermischen Windscherung $\partial \mathbf{v}_g / \partial p = -f_0^{-1} \mathbf{k} \times \nabla_p \alpha$, in einer baroklinen Atmosphäre im Allgemeinen mit der Höhe zu.

Sieht man sich nun den ersten Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.7) genau an, dann erkennt man, dass bei einer mit der Höhe zunehmenden positiven Vorticity-Advektion, d.h. bei negativer differentieller Vorticity-Advektion, der Term positiv ist. Da der zweimal nach dem Ort ableitende Operator vor der Vertikalgeschwindigkeit ω auf der linken Seite der Gleichung bei der Inversion der Gleichung das Vorzeichen dreht, folgt daraus bei Vernachlässigung des zweiten Terms auf der rechten Seite von Gleichung (2.7), dass ω auf der Trogvorderseite in der Troposphäre unterhalb der Höhe des Trogs negativ sein muss, was Aufsteigen bedeutet.

Ein Höhentrog ist also tendenziell mit Divergenz auf seiner Vorderseite in der Höhe sowie Aufsteigen darunter verbunden. Deshalb ist dort Zyklogenese begünstigt.

³Mit differentieller Vorticity-Advektion ist die partielle Ableitung der Vorticity-Advektion nach dem Druck gemeint

2.3 Zyklogeneese in Zusammenhang mit einem Jetstreak

Zur Veranschaulichung der Zyklogeneese unter einem Jetstreak wird im Folgenden von idealisierten Feldern ausgegangen. Gegeben sei ein gerader Jetstreak mit zonaler Achsenausrichtung, welcher einem Temperaturfeld mit einem nach Süden ausgerichteten meridionalen Gradienten überlagert sei (siehe Abbildung 2.4).

Das Zustandekommen der ageostrophischen Zirkulation an solch einem Jetstreak kann man sich anhand einfacher Überlegungen verdeutlichen. Wie zuvor bereits angedeutet, ist die Sekundärzirkulation eine Art Ausgleichsbewegung, die bestrebt ist, das thermische Windgleichgewicht und das hydrostatische Gleichgewicht aufrecht zu erhalten. Sieht man sich die allein durch die geostrophische Strömung verursachte hypothetische zeitliche Entwicklung des oben beschriebenen idealisierten Jetstreak-Musters an, so erkennt man, dass in der Eingangsregion des Jetstreaks der Temperaturgradient durch die konfluente Strömung zunehmen würde. Gleichzeitig würde jedoch die vertikale Windscherung durch die negative geostrophische Impulsadvektion abnehmen. In der Ausgangsregion wären die Verhältnisse durch die diffuente Strömung genau umgekehrt. Sowohl in der Eingangs- als auch in der Ausgangsregion des Jetstreaks würde also das thermische Windgleichgewicht zunehmend zerstört werden⁴. Die Sekundärzirkulation gleicht diese Zerstörungstendenz durch ihre Horizontal- und Vertikalkomponenten gerade wieder aus. Dabei wird die Windscherung aufgrund der durch den südlichen ageostrophischen Horizontalwind ($v_a > 0$) hervorgerufenen positiven Coriolis-Beschleunigung in der Eingangsregion verstärkt. In der Ausgangsregion wird die Windscherung aufgrund der durch den nördlichen ageostrophischen Horizontalwind ($v_a < 0$) hervorgerufenen negativen Coriolis-Beschleunigung abgeschwächt. Der Temperaturgradient wird aufgrund der adiabatischen Abkühlung bzw. Erwärmung, in der Eingangsregion durch Aufsteigen ($\omega < 0$) im Süden und Absinken ($\omega > 0$) im Norden abgeschwächt und in der Ausgangsregion durch Absinken im Süden und Aufsteigen im Norden verstärkt.

Die oben beschriebene Struktur der Sekundärzirkulation an solch einem geraden Jetstreak führt auf das Bild der vier Quadranten. Diese befinden sich in der Ein- und Ausgangsregion jeweils in Strömungsrichtung links und rechts von der Längsachse des Jetstreaks. Zwei dieser Quadranten im rechten Eingangsbereich und im linken Ausgangsbereich sind mit Divergenz und Aufsteigen verbunden. Die anderen beiden Quadranten im linken Eingangsbereich und im rechten Ausgangsbereich sind mit Konvergenz und Absinken verbunden (siehe Abbildung 2.4).

⁴Diese Selbstzerstörungstendenz der geostrophischen Strömung steht für sich betrachtet im Widerspruch zu der Tatsache, dass die reale Strömung in der Erdatmosphäre zu keinem Zeitpunkt große Abweichungen vom geostrophischen Gleichgewicht zeigt, was in *Martin* (2006) auch als das „geostrophische Paradoxon“ bezeichnet wird.

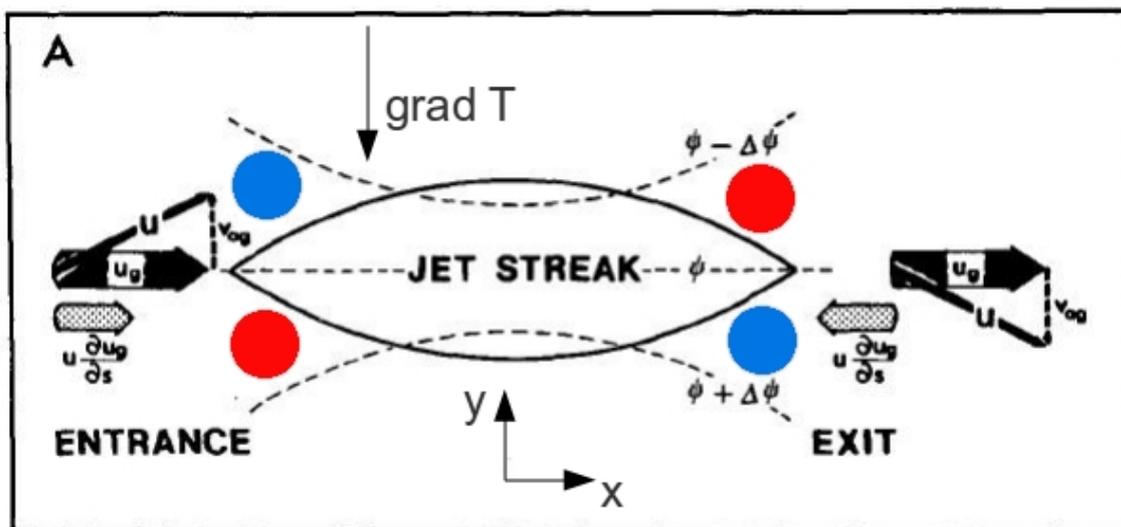


Abbildung 2.4: Abbildung 6 (A) aus *Uccellini & Johnson (1979)* (modifiziert). Verhältnisse an einem geraden Jetstreak. Die Perspektive ist von oben. Die gestrichelten Pfeile zeigen die Richtung der Horizontalkomponenten der ageostrophischen Zirkulation in Höhe des Jetstreaks an. Die kreisförmigen farbigen Markierungen zeigen die 4 Quadranten an. Dabei steht die Farbe rot für Divergenz und Aufsteigen und die Farbe blau für Konvergenz und Absinken. Das Koordinatensystem, die Richtung des Temperaturgradienten und die farbigen Markierungen der 4 Quadranten wurden nachträglich hinzugefügt.

2.4 Der Shapiro-Effekt

Wie *Shapiro & Keyser (1990, siehe S. 173)* zusammengefasst haben, zeigen die Ergebnisse mehrerer Studien, dass der Effekt horizontaler Scherung zusammen mit Kaltluftadvektion entlang einer sich entwickelnden Front in der oberen Troposphäre zu einer Verlagerung der direkten thermischen Zirkulation⁵ in Richtung der warmen Seite der Front führt. Die damit verbundene Verlagerung der Achse der Sekundärzirkulation führt zu Absinken, welches auf der warmen Seite der Front am stärksten ausgeprägt ist. Somit wirkt sich in diesem Fall der senkrecht zur Front gelegene Gradient der Vertikalbewegung frontogenetisch aus.

Der Effekt von Konfluenz und Kaltluftadvektion während der Frontogenese in der oberen Troposphäre wurde von *Rotunno et al. (1994)* als Shapiro-Effekt bezeichnet.

In dieser Arbeit soll im Fall von durch horizontale Windscherung in der oberen Troposphäre verursachter Kaltluftadvektion und dem damit verbundenen Muster der Vertikalbewegung von einem positiven Shapiro-Effekt und im umgekehrten Fall, d.h. bei Warmluftadvektion, von einem negativen Shapiro-Effekt gesprochen werden.

Dass ein lokales Maximum von Warmluftadvektion/Kaltluftadvektion zu Aufsteigen/Absinken führt, wenn man vom Effekt der differentiellen Vorticity-Advektion absieht, erkennt man auch anhand von Gleichung (2.7). Somit ist, im Sinne der hier verwendeten Bezeichnung, ein positiver Shapiro-Effekt eher zyklolytisch und ein negativer Shapiro-Effekt eher zyklogenetisch.

⁵Mit direkter thermischer Zirkulation ist das Aufsteigen warmer Luft und das Absinken kalter Luft gemeint

2.5 Q-Vektor und Omega-Gleichung

Ausgehend von den quasigeostrophischen Impulsgleichungen erhält man unter Ausnutzung der thermischen Windbeziehung und der Divergenzfreiheit des geostrophischen Windes die beiden Komponenten des Q-Vektors (*Hoskins et al.*, 1978), welcher folgende Gestalt hat:

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{pmatrix} -\frac{R}{p} \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial x} \cdot \nabla_p T \\ -\frac{R}{p} \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial y} \cdot \nabla_p T \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Unter Zuhilfenahme der thermodynamischen Energiegleichung und erneuter Anwendung der thermischen Windbeziehung sowie unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung für den ageostrophischen Wind erhält man mit obiger Definition des Q-Vektors die Q-Vektor-Form der Omega-Gleichung⁶:

$$\nabla_p(\sigma \nabla_p \omega) + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = \underbrace{-2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}}_{=F} + \underbrace{f_0 \beta \frac{\partial v_g}{\partial p}}_{\mathbf{A}} - \underbrace{\frac{\kappa}{p} \nabla_p^2 J}_{\mathbf{B}}. \quad (2.9)$$

Die ausführliche Herleitung der Gleichungen (2.8) und (2.9), welche hier nur skizziert wurde, findet man in (*Holton*, 2004, Kapitel 6.4.2).

Die auf der rechten Seite der Gleichung (2.9) stehenden Terme werden als Antriebs-terme bezeichnet.

Die letzten beiden Antriebsterme auf der rechten Seite von Gleichung (2.9) resultieren aus dem sogenannten Beta-Effekt (Term **(A)**), der durch die bis zur linearen Ordnung in der Taylor-Entwicklung berücksichtigte meridionale Änderung des Coriolis-Parameters zustande kommt und aus diabatischem Heizen (Term **(B)**). Auf der f-Ebene, d.h. wenn an jedem Ort $f = f_0$ gesetzt wird, und bei trockener Dynamik sind die Terme **(A)** und **(B)** gleich Null (kein Beta-Effekt und kein diabatisches Heizen) und die Vertikalbewegung wird ausschließlich durch den Antriebsterm $F = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}$ bestimmt. Letzterer wird im Folgenden auch als *dynamischer* Antriebsterm bezeichnet. Er ist identisch mit der rechten Seite von Gleichung (2.7).

Übernimmt man außerdem noch die weit verbreitete Annahme, dass die statische Stabilität auf einer Druckfläche konstant ist, dann vereinfacht sich die Omega-Gleichung zu folgender Form:

$$\sigma \nabla_p^2 \omega + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}. \quad (2.10)$$

⁶In *Hoskins et al.* (1978) wurde die Q-Vektor-Form der Omega-Gleichung in die Meteorologie eingeführt. Sie hat gegenüber der traditionellen Omega-Gleichung (Gleichung (2.7)) den großen Vorteil, dass sie die Summe aus den beiden Einzeltermen auf der rechten Seite von Gleichung (2.7) durch den Q-Vektor in einem Term vereint. Dadurch besteht nicht die Gefahr, dass man bei der Berechnung des Antriebsterms die Differenz von zwei fast gleich großen Termen bildet, was schon bei kleinen Ungenauigkeiten "gefährlich" für das richtige Vorzeichen werden kann. Außerdem ist bei der Q-Vektor-Form der Omega-Gleichung die Divergenz des Q-Vektors im Gegensatz zu den beiden Einzeltermen auf der rechten Seite der traditionellen Omega-Gleichung gegenüber Galilei-Transformationen invariant (siehe *Hoskins & Pedder*, 1980, S. 708). Eine ausführliche Darstellung und Diskussion der historischen Entwicklung der Analyse der Vertikalbewegung findet man in *Dunn* (1991).

2.6 Aufteilung des Q-Vektors

Allgemein lässt sich die Omega-Gleichung als $\mathcal{L}\omega = F$ schreiben. Dabei ist \mathcal{L} ein linearer elliptischer Differentialoperator. Aufgrund der Linearität von \mathcal{L} ist eine Aufteilung des Q-Vektors analog zu einer Aufteilung von Omega, d.h. dem aus jedem Anteil des Q-Vektors in N Anteile \mathbf{Q}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) jeweils folgenden dynamischen Antriebsterm $F_i = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}_i$ ist ein entsprechender Anteil der Vertikalgeschwindigkeit ω_i zuzuordnen, und die Verhältnisse der einzelnen Anteile zueinander sind bei F und ω gleich groß, so dass insbesondere auch $\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i$ gilt.

Neben der Linearität besitzt der \mathcal{L} -Operator noch folgende Eigenschaften:

1.: Glättung des Antriebsfeldes, 2.: Näherungsweise Erhalt der Extrema, 3.: Umkehrung des Vorzeichens.

Die Aufteilung des Q-Vektors in verschiedene Anteile ist eine übliche Vorgehensweise bei der Untersuchung von Vertikalbewegung und Frontogenese. Eine verbreitete Aufteilung führt auf zwei Komponenten des Q-Vektors auf einer isobaren Fläche, von denen die eine senkrecht zu den Isentropen⁷, die andere parallel zu den Isentropen ausgerichtet ist.

Dafür wird ein entsprechendes natürliches Koordinatensystem gewählt in dem die beiden Komponenten des Q-Vektors folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathbf{Q}_s = \left(\mathbf{s} \cdot \frac{d}{dt} \nabla \theta \right) \mathbf{s} \quad (2.11)$$

und

$$\mathbf{Q}_n = \left(\mathbf{n} \cdot \frac{d}{dt} \nabla \theta \right) \mathbf{n}. \quad (2.12)$$

Hierbei ist $\frac{d}{dt} \nabla \theta$ die materielle Änderungsrate des horizontalen Gradienten der potentiellen Temperatur $\theta = T (p_s/p)^{(R/c_p)}$, wobei R die Gaskonstante für trockene Luft, c_p die spezifische Wärmekapazität trockener Luft bei konstantem Druck und p_s ein Standard-Luftdruck, der üblicherweise auf 1000 hPa gesetzt wird, ist. Die Vektoren $\mathbf{n} = -|\nabla \theta|^{-1} \nabla \theta$ sowie $\mathbf{s} = \mathbf{n} \times \mathbf{k}$ sind die Einheitsvektoren des natürlichen Koordinatensystems senkrecht bzw. parallel zu den Isentropen (siehe Abbildung 2.5). Dabei ist \mathbf{k} der vertikale Einheitsvektor.

Wie *Keyser et al.* (1992) gezeigt haben, führt diese Aufteilung zu einer Trennung der Skalen des Musters der mit einer baroklinen Störung verbundenen Vertikalbewegung: Die mit der Komponente \mathbf{Q}_n in Zusammenhang stehende Vertikalbewegung ω_n weist eine bandartige Struktur auf der Skala einer Frontalzone auf, wohingegen die mit der Komponente \mathbf{Q}_s in Zusammenhang stehende Vertikalbewegung ω_s eine zellulare Struktur aufweist und sich auf der synoptischen Skala zeigt. Eine weitere Studie, welche ebenfalls diese Q-Vektor-Aufteilung verwendete, zeigte, dass – zumindest am Ende des Lebenszyklus einer Zyklone – ω_s mit mehr als 80 % den größten Anteil an dem zyklogenetischen Abfallen des Geopotentials ausmacht (*Martin*, 2007).

⁷Als Isentropen bezeichnet man die Linien gleicher potentieller Temperatur

In dieser Arbeit wird eine andere Aufteilung des Q -Vektors angewendet. Diese folgt *Jusem & Atlas* (1998), die den Q -Vektor und die dazugehörige dynamische Vertikalbewegung in vier verschiedene Anteile aufteilen. Der Q -Vektor wird dabei auf Isohypsen⁸, anstatt auf Isentropen projiziert, und das natürliche Koordinatensystem folgt dem geostrophischen Wind (siehe Abbildung 2.6).

Die Motivation für diese Wahl des natürlichen Koordinatensystems liegt darin begründet, dass hierdurch der kinematische Charakter jeweils bestimmter Strömungseigenschaften in den einzelnen Anteilen des Q -Vektors in besonderer Weise herausgestellt wird. Der erhoffte Vorteil der Aufteilung nach *Jusem & Atlas* (1998) für das Erreichen des zentralen Ziels dieser Arbeit ist, dass die mit den einzelnen Q -Vektor-Anteilen verbundenen Strömungseigenschaften sich gut mit jeweils einem der beiden Phänomene Höhentrog und Jetstreak in Zusammenhang bringen lassen.

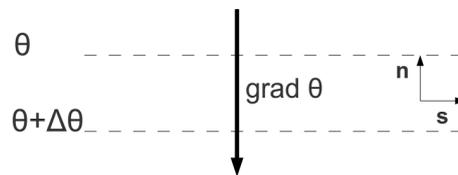


Abbildung 2.5: Einheitsvektoren in einem natürlichen Koordinatensystem, welches sich an den Isentropen ausrichtet.

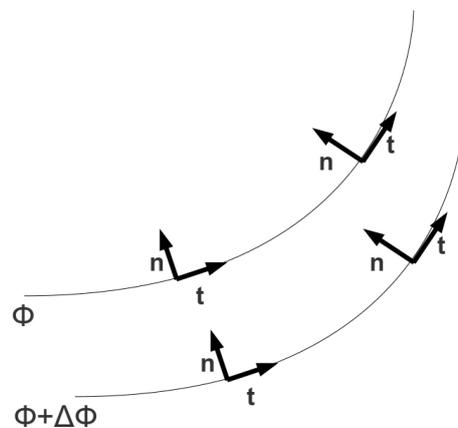


Abbildung 2.6: Einheitsvektoren in einem natürlichen Koordinatensystem, welches sich an den Isohypsen ausrichtet.

⁸Als Isohypsen bezeichnet man die Linien gleichen Geopotentials

Ausgangspunkt der Herleitung der vier Q-Vektor-Anteile in *Jusem & Atlas* (1998) ist die folgende Gleichung für den Q-Vektor:

$$\mathbf{Q} = -\nabla_p \mathbf{v}_g \cdot \nabla_p \alpha, \quad (2.13)$$

mit dem wie in Gleichung (2.4) definierten geostrophischen Wind \mathbf{v}_g . Im Unterschied zur verschwindenden Divergenz des geostrophischen Windes $\nabla_p \cdot \mathbf{v}_g = 0$, ist $\nabla_p \mathbf{v}_g$ in Gleichung (2.13) der geostrophische Geschwindigkeits-Gradiententensor, d.h.:

$$\nabla_p \mathbf{v}_g \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial u_g}{\partial x} & \frac{\partial v_g}{\partial x} \\ \frac{\partial u_g}{\partial y} & \frac{\partial v_g}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

In *Jusem & Atlas* (1998, Anhang B) wird für die Herleitung der Formeln für die Berechnung der Q-Vektor-Anteile und der Antriebsterme die Divergenzfreiheit des geostrophischen Windes, also dass $\nabla_p \cdot \mathbf{v}_g = 0$ gilt, ausgenutzt.

Gleichung (2.13) lässt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{i} \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right). \quad (2.15)$$

Dabei sind \mathbf{i} und \mathbf{j} die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems in x- und y-Richtung.

Nach Transformation in das natürliche Koordinatensystem nimmt Gleichung (2.15) folgende Gestalt an:

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{t} \left(\frac{\partial s_g}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial s} + K_s s_g \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right) - \mathbf{n} \left(\frac{\partial s_g}{\partial n} \frac{\partial \alpha}{\partial s} + K_n s_g \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right). \quad (2.16)$$

Dabei ist s_g der Betrag der Geschwindigkeit des geostrophischen Windes, d.h. $s_g = (u_g^2 + v_g^2)^{\frac{1}{2}}$. Mit $K_s = \frac{\partial \beta}{\partial s}$ wird die Krümmung der Isohypsen und mit $K_n = \frac{\partial \beta}{\partial n}$ die Krümmung der auf diesen stehenden Normalen bezeichnet, wobei β der Winkel zwischen der Richtung des geostrophischen Windes und der zonalen Achse ist. Für eine sich im Uhrzeigersinn bewegendende Strömung gilt $K_s < 0$ und für eine sich entgegen dem Uhrzeigersinn bewegendende Strömung gilt $K_s > 0$. Für eine konfluente Strömung gilt $K_n < 0$ und für eine diffluente Strömung gilt $K_n > 0$.

Die Bedingung der Divergenzfreiheit des horizontalen Windfelds lautet in diesem natürlichen Koordinatensystem:

$$\frac{\partial s_g}{\partial s} + K_n s_g = 0. \quad (2.17)$$

Wie man an Gleichung (2.17) sieht, führt die Einschränkung der Divergenzfreiheit des Windfeldes dazu, dass, zu einem festen Zeitpunkt betrachtet, Diffluenz immer mit einer stromabwärts geringer werdenden Windgeschwindigkeit und Konfluenz immer mit einer stromabwärts größer werdenden Windgeschwindigkeit verbunden ist.

Durch Aufteilung in die einzelnen Summanden erhält man aus Gleichung (2.16) die vier oben erwähnten Q-Vektor-Anteile.

Diese sind demnach durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\mathbf{Q}_{alst} = -\mathbf{t} \frac{\partial s_g}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{Q}_{curv} = -\mathbf{t} s_g K_s \frac{\partial \alpha}{\partial n}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{Q}_{shdv} = -\mathbf{n} \frac{\partial s_g}{\partial n} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \quad (2.20)$$

und

$$\mathbf{Q}_{crst} = -\mathbf{n} s_g K_n \frac{\partial \alpha}{\partial n}. \quad (2.21)$$

Dabei stehen die Abkürzungen *alst*, *curv*, *shdv* und *crst* für die englischen Wörter **along-stream stretching**, **curvature**, **shear advection** und **cross-stream stretching**. Abbildung (Abbildung 2.7) zeigt die vier Q-Vektoren für jeweils dem Effekt entsprechend idealisierte Strömungs- und Temperaturverhältnisse.

Die beiden Vektoren \mathbf{Q}_{alst} und \mathbf{Q}_{crst} stehen in Zusammenhang mit der Verstärkung/Abschwächung des Temperaturgradienten entlang der Strömungsrichtung und senkrecht zur Strömungsrichtung durch Stauchung/Streckung. Sie sind über die Gleichung (2.17) aneinander gekoppelt. Ihre Summe, welche im Folgenden der Notation aus *Jusem & Atlas* (1998) folgend mit \mathbf{Q}_{st} (*st* steht für englisch: **stretching**) bezeichnet wird, steht somit in Zusammenhang mit dem gesamten Einfluss der Konfluenz bzw. Diffluenz der Strömung auf den horizontalen Temperaturgradienten:

$$\mathbf{Q}_{st} = \mathbf{Q}_{alst} + \mathbf{Q}_{crst} = K_n s_g \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \mathbf{t} - \frac{\partial \alpha}{\partial n} \mathbf{n} \right). \quad (2.22)$$

Der Vektor \mathbf{Q}_{curv} beschreibt die Änderung des Temperaturgradienten senkrecht zur Strömungsrichtung, welche durch die Krümmung der Isohypsen hervorgerufen wird.

Der Vektor \mathbf{Q}_{shdv} steht für die Änderung des Temperaturgradienten entlang der Strömung, welche durch die horizontale Scherung der Strömung hervorgerufen wird.

Da das Muster der 4 Quadranten eines Jetstreaks (siehe Abschnitt 2.3) aus der Konfluenz/Diffluenz am Eingang/Ausgang des Jetstreaks resultiert, ist dieses mit dem Vektorfeld von \mathbf{Q}_{st} in Verbindung zu bringen. Außerdem ist ein Jetstreak, seiner Definition gemäß, mit starker horizontaler Windscherung in der Höhe verbunden, so dass sich im Fall von Temperaturadvektion durch den Jetstreak im Vektorfeld von \mathbf{Q}_{shdv} der Shapiro-Effekt (siehe Abschnitt 2.4) zeigt.

Ein Höhentrog hingegen ist in erster Linie durch die Krümmung der Isohypsen bzw. durch die Krümmung der Stromlinien in der Höhe gekennzeichnet und deshalb mit dem Q-Vektor-Anteil \mathbf{Q}_{curv} in Verbindung zu bringen.

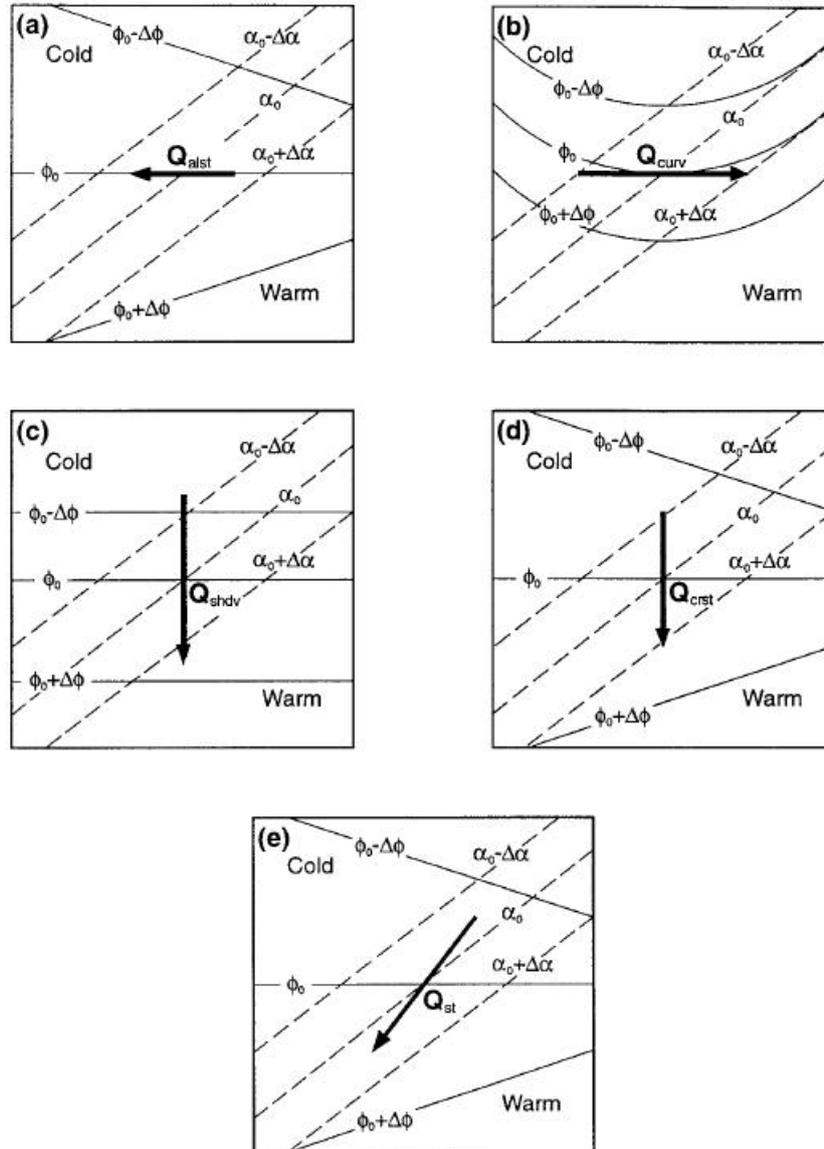


Abbildung 2.7: Abbildung 1 aus *Jusem & Atlas* (1998). Schematische Darstellung der Q-Vektor-Anteile in einem natürlichen Koordinatensystem, das dem geostrophischen Wind folgt. Der Q-Vektor-Anteil ist jeweils in der Mitte des entsprechenden Quadrates zentriert. Durchgezogene Linien kennzeichnen das Geopotential und gestrichelte Linien das spezifische Volumen, welches auf einer Fläche konstanten Druckes proportional zur Temperatur ist. (a) Along-stream stretching-Komponente, (b) Curvature-Komponente, (c) Shear advection-Komponente, (d) Cross-stream stretching-Komponente, (e) Stretching-Komponente aus Addition von (a) und (d).

Die Q-Vektor-Komponenten Q_{curv} , Q_{st} und Q_{shdv} lassen sich nun in die entsprechenden drei Anteile des dynamischen Antriebsterms $F = F_{curv} + F_{st} + F_{shdv}$ aufteilen. Aus diesen erhält man, wegen der zuvor bereits erwähnten Linearität der Omega-Gleichung, die drei entsprechenden Anteile der gesamten Vertikalbewegung $\omega = \omega_{curv} + \omega_{st} + \omega_{shdv}$.

2.7 Die Alternative Balance

Gerade in den in dieser Arbeit betrachteten Bereichen größerer Krümmung der Isohypsen und im Ein- und Ausgangsbereich des Jetstreaks sind für den geostrophischen Wind die größten Abweichungen vom tatsächlichen Wind zu erwarten.

In dieser Arbeit wird deshalb die von *Davies-Jones* (1991) eingeführte Alternative Balance (AB) benutzt, da man sich von dieser einen Gewinn an Genauigkeit versprechen kann.

In *Davies-Jones* (1991) wird eine druckabhängige Pseudo-Höhe als vertikale Koordinate verwendet, weshalb dort die Vertikalgeschwindigkeit w eine andere als die in herkömmlichen kartesischen Koordinaten definierte ist.

Der grundlegende Unterschied der AB-Approximation zur klassischen quasigeostrophischen Approximation ist die andere mathematische Realisierung der instantanen Wiederherstellung der geostrophischen Balance durch die ageostrophische Zirkulation. Statt der materiellen Änderung des ageostrophischen Windes wird die materielle Änderung der ageostrophischen relativen Vorticity gleich Null gesetzt. Die AB-Gleichungen bilden einen kompletten Satz an Gleichungen für die vier abhängigen Variablen u , v , w und b , mit $b \propto \theta$. Da die Gleichung $\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla b = 0$ die einzige prognostische Gleichung in diesem Satz ist, sind Trägheitsschwerewellen in den Lösungen ausgeschlossen. Man kann die AB-Approximation auch als Ersetzen der materiellen Änderung der horizontalen relativen Vorticity mit der materiellen Änderung der horizontalen *geostrophischen* relativen Vorticity in der horizontalen Vorticity-Gleichung (*Davies-Jones*, 1991, Gleichung (3.14)) verstehen, welche wie folgt lautet:

$$\frac{d\zeta_H}{dt} = (\zeta_H \cdot \nabla) \mathbf{v}_H + f \frac{\partial \mathbf{v}'_H}{\partial z}. \quad (2.23)$$

Dabei ist ζ_H die horizontale relative Vorticity, \mathbf{v}_H der Horizontalwind und \mathbf{v}'_H der ageostrophische Horizontalwind.

In *Davies-Jones* (1991) wird die folgende Omega-Gleichung hergeleitet:

$$f \nabla_p \cdot \left(\frac{d\zeta'_H}{dt} \right) = 2f \nabla_p \cdot \mathbf{Q}^* - \nabla_p \cdot (N^2 \nabla_p w) - f^2 \partial^2 w / \partial z^2. \quad (2.24)$$

Dabei ist f der von der geographischen Breite abhängige Coriolis-Parameter und $N^2 = \left(\frac{g}{h\theta_0} \right)^2 \sigma$ die quadrierte *lokale* Brunt-Väisälä-Frequenz. Die Vertikalgeschwindigkeit $w = -(h\theta_0/g)\omega$ mit $h = \frac{R}{p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{c_V}{c_p}}$, wobei $c_V \approx 717 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ die spezifische Wärmekapazität trockener Luft bei konstantem Volumen ist. θ_0 ist eine konstante potentielle Temperatur. Die vertikale Koordinate $z = (c_p \theta_0 / g) (1 - (p/p_0)^{R/c_p})$ ist die weiter oben bereits angesprochene Pseudo-Höhe, die ausschließlich vom Druck abhängt. Der in Gleichung (2.24) stehende Q-Vektor \mathbf{Q}^* ist ein verallgemeinerter Q-Vektor, der in *Davies-Jones* (1991) folgendermaßen definiert wird:

$$2\mathbf{Q}^* = (\zeta_H - \nabla_p b) \cdot \nabla_p \mathbf{v}, \quad (2.25)$$

mit der thermischen Variablen $b = (g/f)\theta/\theta_0$, die so definiert ist, dass ihr Gradient – wie die Vorticity – die Einheit s^{-1} hat. Analog zu Gleichung (2.13) ist $\nabla_p \mathbf{v}$ wieder ein Tensor, der wie in Gleichung (2.14) definiert ist, hier aber mit dem gesamten Wind $\mathbf{v} = (u, v)$ statt mit dem geostrophischen Wind $\mathbf{v}_g = (u_g, v_g)$.

Die AB-Approximation impliziert nun, dass die linke Seite von Gleichung (2.24) global gleich Null ist, woraus dann die AB-Omega-Gleichung folgt.

Da der divergente Anteil des Windes und Abweichungen von der thermischen Balance im Allgemeinen gering sind, erhält man eine gute Näherung für \mathbf{Q}^* , die im Folgenden mit \mathbf{Q}_{AB} bezeichnet wird, indem man die vertikale Windscherung durch die thermische Windscherung und die horizontalen Gradienten der Wind-Komponenten durch die horizontalen Gradienten der Komponenten des nicht-divergenten Windes \mathbf{v}_ψ ersetzt⁹.

⁹Diese Näherung hat den Vorteil, dass man zur Bestimmung von \mathbf{Q}_{AB} auf einer bestimmten Pseudo-Höhe nur Temperatur- und Windfeld auf eben dieser Pseudo-Höhe benötigt.

Nachfolgend sind die Approximationen, die auf die in dieser Arbeit verwendete AB-Omega-Gleichung führen noch einmal aufgeführt:

- Die materielle Änderung der horizontalen ageostrophischen Vorticity wird auf Null gesetzt
- Die vertikale Windscherung im generalisierten Q-Vektor \mathbf{Q}^* wird in \mathbf{Q}_{AB} durch die thermische Windscherung ersetzt
- Die Horizontalgradienten des Windes im generalisierten Q-Vektor \mathbf{Q}^* werden in \mathbf{Q}_{AB} durch die Horizontalgradienten des nicht-divergenten Anteils des Windes ersetzt

Bei der Alternativen Balance wird also der nicht-divergente Wind für den Q-Vektor herangezogen. Die Q-Vektor-Aufteilung von *Jusem & Atlas* (1998) gilt jedoch für den geostrophischen Wind, welcher dort per Definition divergenzfrei ist. Wie zuvor bereits erwähnt, ist diese Divergenzfreiheit in den von *Jusem & Atlas* (1998) angegebenen Formeln für die Berechnung der Q-Vektor-Anteile implizit enthalten.

Die in *Jusem & Atlas* (1998) angegebenen Gleichungen gelten analog, wenn man das natürliche Koordinatensystem entsprechend der Stromlinien (= Linien mit $\psi = \text{const}$) wählt, auch bei Substitution des CF-geostrophischen Windes mit dem nicht-divergenten Wind $\mathbf{v}_\psi = \mathbf{k} \times \nabla\psi$, welchen man mittels der Helmholtz-Zerlegung aus der Stromfunktion ψ erhält.

Davon kann man sich überzeugen, wenn man die Herleitungen der für die Konvertierung von natürlichen in kartesische Koordinaten benötigten Formeln im Anhang von *Jusem & Atlas* (1998) betrachtet. Für die Gültigkeit dieser ist nämlich letztendlich nur die verschwindende Divergenz des verwendeten Windfeldes auf der jeweils betrachteten Druckfläche notwendig. Die Ausrichtung der Einheitsvektoren des natürlichen Koordinatensystems hängt an jedem Punkt von dem Verhältnis von Zonal- bzw. Meridional Komponente des Windfeldes zu dem Betrag des entsprechenden Windvektors ab.

Insofern ist die Verwendung der Alternativen Balance nach *Davies-Jones* (1991) und die damit verbundene Substitution des CF-geostrophischen Windes mit dem nicht-divergenten Wind im Q-Vektor \mathbf{Q}_{AB} für die Aufteilung von *Jusem & Atlas* (1998) erlaubt.

2.7.1 Herleitung unter ausschließlicher Verwendung der Konvertierungsformeln aus *Davies-Jones* (1991)

In *Davies-Jones* (1991) wurde die Omega-Gleichung nach Einführung einer Pseudo-Höhe hergeleitet. Da in dieser Arbeit aber durchgängig die Vertikalgeschwindigkeit in Druckkoordinaten ω verwendet werden soll, ist für die Verwendung in dieser Arbeit eine Konvertierung der Omega-Gleichung aus *Davies-Jones* (1991) in Druckkoordinaten erforderlich.

Mit Gleichung (2.24) als Ausgangspunkt, wobei die linke Seite auf Null gesetzt wird, was der Vernachlässigung der materiellen Änderung der ageostrophischen horizontalen relativen Vorticity entspricht, kann man eine AB-Variante der Omega-Gleichung aufstellen, deren Herleitung im Folgenden erklärt werden soll.

Dazu werden die im Anhang B von *Davies-Jones* (1991) angegebenen Konvertierungsformeln verwendet, die aus Gründen der Nachvollziehbarkeit hier noch einmal aufgelistet werden:

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv -\frac{g}{h\theta_0} \frac{\partial}{\partial p}, \quad (2.26a)$$

$$w \equiv -\frac{h\theta_0}{g} \omega, \quad (2.26b)$$

$$N^2 \equiv \left(\frac{g}{h\theta_0} \right)^2 \sigma, \quad (2.26c)$$

mit

$$h \equiv \frac{R}{p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{c_V}{c_p}} \quad (2.26d)$$

und

$$\sigma = -h \frac{\partial \theta}{\partial p}. \quad (2.26e)$$

Zuerst soll der letzte Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.24) aus *Davies-Jones* (1991), d.h. $f^2 \partial^2 w / \partial z^2$ mit Hilfe der Konvertierungsformeln aus *Davies-Jones* (1991) in Druckkoordinaten ausgedrückt werden.

Dazu wird zuerst die erste Vertikalableitung in kartesischen Koordinaten in Druckkoordinaten konvertiert:

$$\frac{\partial}{\partial z} w = -\frac{g}{h\theta_0} \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{h\theta_0}{g} \omega \right).$$

Die Größe θ_0 ist konstant und g wird als konstant angenommen. Deshalb können diese beiden Größen vor die Ableitungen gezogen werden, wo sie sich dann herauskürzen.

Übrig bleibt also:

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial p} (h\omega) = \frac{1}{h} \left(h \frac{\partial \omega}{\partial p} + \omega \frac{\partial h}{\partial p} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial p} + \frac{\omega}{h} \frac{\partial h}{\partial p}.$$

Nun wird dieser Ausdruck nochmals nach z abgeleitet, wodurch man nach erneuter Anwendung der Konvertierungsformeln Folgendes erhält:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} w \right) = -\frac{g}{h\theta_0} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} + \frac{\omega}{h} \frac{\partial h}{\partial p} \right).$$

Aus dem rechten Term in der Klammer auf der rechten Seite des letzten Ausdrucks werden nach Anwendung der Produktregel 3 Einzelterme, wodurch sich insgesamt 4 Terme für diesen Ausdruck ergeben:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} w \right) = -\frac{g}{h\theta_0} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial p} \frac{\partial \omega}{\partial p} + \frac{\omega}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial p^2} - \frac{\omega}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)^2 \right).$$

Der Term in den äußeren Klammern auf der rechten Seite kann zusammengefasst werden zu:

$$(\dots) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial p} \frac{\partial \omega}{\partial p} + \frac{\omega}{h} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial p^2} - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)^2 \right).$$

Nebenrechnung:

Es gilt:

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{R}{p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{(c_V/c_p)} \right] = -\frac{h}{p} \frac{c_V}{c_p}$$

und

$$\frac{\partial^2 h}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p} \left[-\frac{1}{p} \frac{c_V}{c_p} \cdot h \right] = \frac{h}{p^2} \frac{c_V}{c_p} \left(1 + \frac{c_V}{c_p} \right).$$

Damit erhält man schließlich für den gesamten letzten Ausdruck auf der linken Seite von (B6) aus *Davies-Jones* (1991):

$$-f^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \frac{f^2 g}{h \theta_0} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \frac{1}{p} \frac{c_V}{c_p} \frac{\partial \omega}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{c_V}{c_p} \omega \right).$$

Setzt man nun zusätzlich noch $f = f_0$ erhält man folgende Omega-Gleichung:

$$\nabla_p (\sigma \nabla_p \omega) + f_0^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \frac{1}{p} \frac{c_V}{c_p} \frac{\partial \omega}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{c_V}{c_p} \omega \right) = F_{AB}. \quad (2.27)$$

Der in $F_{AB} = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}_{AB}$ eingehende Q-Vektor \mathbf{Q}_{AB} hat folgende Gestalt:

$$\mathbf{Q}_{AB} = -\nabla \mathbf{v}_\psi \cdot \alpha = -\mathbf{i} \left(\frac{\partial u_\psi}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\psi}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial u_\psi}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\psi}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right). \quad (2.28)$$

Dabei ist $\mathbf{v}_\psi = (u_\psi, v_\psi)$ der nicht-divergente Wind.

2.7.2 AB-Omega-Gleichung nach *Mallet et al.* (1999)

Die einzige AB-Omega-Gleichung, die dem Autor dieser Arbeit aus der Literatur bekannt ist, stammt aus *Mallet et al.* (1999). Die Herleitung dieser AB-Omega-Gleichung ist in *Mallet et al.* (1999) zwar nicht angegeben, folgt jedoch aus den dem Autor dieser Arbeit freundlicherweise zugesendeten Notizen (*Cammass*, 2011). Diese Herleitung ist nicht äquivalent zu der zuvor mittels der Konvertierungsformeln aus *Davies-Jones* (1991) hergeleiteten AB-Omega-Gleichung. Die bei der Berechnung der Vertikalbewegung gefundenen Unterschiede zwischen diesen beiden Varianten sind jedoch gering. Darauf wird im Ergebnisteil dieser Arbeit noch einmal genauer eingegangen.

Die aus *Cammass* (2011) nachvollzogene Herleitung der AB-Omega-Gleichung aus *Mallet et al.* (1999), soll nun kurz skizziert werden:

2.7.2.1 Thermische Windbeziehung

Die thermische Windgleichung lautet in der Schreibweise von *Mallet et al.* (1999):

$$f_0 \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} = h \nabla \theta, \quad (2.29)$$

2.7.2.2 Skizze der Herleitung

1. Die thermodynamische Energie-Gleichung $\frac{d\theta}{dt} = \frac{Q}{\Pi c_p}$ mit $\Pi = h \cdot \frac{p}{R}$ wird partiell nach x bzw. nach y abgeleitet und anschließend mit h multipliziert. Somit erhält man einen Ausdruck für $\frac{d}{dt}$ (2.29).
2. Die materielle Änderung der vertikalen Scherung des Gesamtwindes wird über die Impulsgleichungen und unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung ausgedrückt.
3. Durch Subtraktion der aus den letzten beiden Punkten erhaltenen Ausdrücke erhält man einen Ausdruck für die materielle Änderung der vertikalen Scherung des ageostrophischen Windes.
4. Durch algebraische Umformungen der so jeweils für den zonalen und meridionalen ageostrophischen Wind erhaltenen Gleichungen und anschließende Anwendung der AB-Approximationen kommt man durch Bildung der partiellen Ableitungen nach x bzw. nach y dieser Gleichungen und Addition selbiger auf einen Ausdruck für die Omega-Gleichung mit der Divergenz des entsprechend AB verallgemeinerten Q -Vektors sowie weiteren von ω unabhängigen Termen (Reibungsterm, diabatischer Heizterm und durch den Beta-Effekt auftretender Term) auf der rechten Seite.
5. Die linke Seite kann unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung, der Beziehung zwischen Vertikalgradient der geostrophischen Vorticity und Laplace der potentiellen Temperatur (siehe Gleichung (1) in *Hoskins et al.* (1978)) sowie der thermischen Windbeziehung (2.29) auf eine Form gebracht werden, mit der man schließlich die folgende Omega-Gleichung (siehe *Mallet et al.*, 1999, Anhang) erhält:

$$\begin{aligned} \sigma \nabla_p^2 \omega + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{h c_V}{p} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{h c_V}{p} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega \frac{h c_V}{p} \nabla_p^2 \theta = \\ -2h(\nabla_p \cdot \mathbf{Q}_{AB}) - f_0 \mathbf{k} \cdot \left(\nabla_p \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \right) - \frac{R}{c_p p} \nabla_p^2 \dot{Q} + \beta f_0 \frac{\partial v_g}{\partial p}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

mit $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ als Meridionalgradient des Coriolis-Parameters, $\dot{Q} = \mathcal{H} c_p \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}}$ als Heizrate mit $\mathcal{H} = \frac{D\theta}{Dt}$ und \mathbf{F} als Reibungskraft. Mit c_V wird hier die spezifische Wärmekapazität trockener Luft bei konstantem Volumen bezeichnet.

Bei der Verwendung dieser Variante der Omega-Gleichung werden in dieser Arbeit alle Terme bis auf den ersten auf der rechten Seite von Gleichung (2.30) gleich Null gesetzt. Es wird also nur der aus der Divergenz von \mathbf{Q}_{AB} resultierende Antriebsterm verwendet.

3. Methodik

In diesem Kapitel wird erläutert, wie die Aufteilung von Jusem & Atlas (1998) für die Berechnung der Anteile des dynamischen Antriebsterms implementiert wurde und warum diese Implementierung nur zum Teil der Anleitung aus Jusem & Atlas (1998) folgt. Außerdem wird auf die verwendeten Daten eingegangen. Schließlich wird in aller Kürze die numerische Lösung der Omega-Gleichung angesprochen, deren ausführliche Behandlung sich im Anhang befindet.

3.1 Implementierung der Aufteilung von Jusem & Atlas (1998)

Wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, führt die Aufteilung des Q-Vektors von Jusem & Atlas (1998) auf 4 Anteile des Q-Vektors. Diese sind, in den Gleichungen (2.18) bis (2.21) in natürlichen Koordinaten ausgedrückt. Da das in dieser Arbeit verwendete Modellgitter kartesisch ist, werden für die Implementierung Ortsableitungen in kartesischen Koordinaten verwendet. Diese werden dabei mit zentrierten Differenzen berechnet.

Für die Berechnung der (partitionierten) Vertikalbewegung wird die Divergenz des Q-Vektors bzw. werden die Divergenzen seiner Anteile benötigt, da auf der rechten Seite der Omega-Gleichung der dynamische Antriebsterm $F = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}$ steht. Um die Q-Vektor-Anteile und die aus ihnen resultierenden dynamischen Antriebsterme zu berechnen, geben Jusem & Atlas (1998) im Anhang Formeln an. Diese ermöglichen die Berechnung der Q-Vektor-Anteile und der dazugehörigen Antriebsterme unter Verwendung der ersten und zweiten Ortsableitungen der Windkomponenten und des spezifischen Volumens in *kartesischen* Koordinaten.

Nach der Implementierung dieser Formeln für die vorliegende Arbeit in ein Programm, ergaben sich bei den Werten der Antriebsterme gewisse Inkonsistenzen. Diese äußerten sich dadurch, dass die Summe ihrer Anteile $F = F_{curv} + F_{st} + F_{shdv}$ zum Teil recht deutliche Abweichungen von dem klassisch aus dem durch Gl. (2.13)

bestimmten Q-Vektor berechneten Antriebsterm F_{ref} zeigte. Diese Abweichungen, d.h. $|F - F_{ref}|$, waren in Bereichen starker Krümmung der Stromlinien am stärksten. Da jedoch gerade diese Bereiche für die zentrale Fragestellung dieser Arbeit von besonderer Bedeutung sind, wurden diese Abweichungen als Hindernis für die korrekte Interpretation der aus den Antriebstermen berechneten Anteile der Vertikalbewegung betrachtet.

Um dieses Problem zu vermeiden, wurde eine andere Methode zur Berechnung der Antriebsterme aus den in natürlichen Koordinaten gegebenen Q-Vektor-Anteilen implementiert, die im Rahmen der Rechengenauigkeit im Allgemeinen exakt ist und nur bei einzelnen Gitterpunkten im Bereich des ET-Systems Inkonsistenzen zur Folge hatte.

Diese alternative Methode soll nun kurz erklärt werden:

Die Einheitsvektoren des natürlichen Koordinatensystems \mathbf{t} und \mathbf{n} lassen sich über die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems \mathbf{i} und \mathbf{j} folgendermaßen ausdrücken:

$$\mathbf{t} = C \mathbf{i} + S \mathbf{j} \quad (3.1)$$

und

$$\mathbf{n} = -S \mathbf{i} + C \mathbf{j}, \quad (3.2)$$

$$\text{mit } C = \frac{u_g}{s_g} = \cos\beta$$

und mit $S = \frac{v_g}{s_g} = \sin\beta$, wobei β wieder der Winkel zwischen der zonalen Achse und dem Vektor $\mathbf{v}_g = (u_g, v, g)$ ist.

Mit Hilfe dieser beiden Transformations-Gleichungen kann man die vier Q-Vektor-Anteile aus *Jusem & Atlas* (1998) (siehe Gleichungen (2.18) bis (2.21)) in kartesischen Komponenten ausdrücken.

Somit kann man die Divergenzen der Q-Vektor-Anteile und damit die jeweiligen Antriebsterme einfach über die in kartesischen Koordinaten berechneten Ortsableitungen ihrer kartesischen Komponenten berechnen.

Es soll an dieser Stelle auch darauf hingewiesen werden, dass die Implementierung der Berechnung der einzelnen Antriebsterme, wie sie in *Jusem & Atlas* (1998, S. 2184) beschrieben wird, nach Meinung des Autors dieser Arbeit möglicherweise nicht gänzlich frei von Unstimmigkeiten ist. Darauf wird im zweiten Teil des Anhangs dieser Arbeit näher eingegangen. Selbst nach der Beseitigung dieser vermeintlichen Unstimmigkeiten war jedoch immer noch die oben beschriebene alternative Vorgehensweise zur Bestimmung der Antriebsterme merklich konsistenter.

3.2 Die verwendeten Daten

Für die in dieser Arbeit durchgeführte Untersuchung wurde der gleiche Modell-Lauf, wie in dem idealisierten numerischen Experiment aus *Riemer et al. (2008)* benutzt¹. Eine ausführliche Beschreibung der Parameter, des Gitters sowie der Anfangsbedingungen findet man im zweiten Abschnitt von *Riemer et al. (2008)*.

3.2.1 Die Entwicklung in dem numerischen Experiment aus *Riemer et al. (2008)*

In dem numerischen Experiment von *Riemer et al. (2008)* nähert sich ein TC von Süd-Westen her einem geraden Strahlstrom. Betrachtet wird die Entwicklung in diesem Experiment über einen Zeitraum von 240 Stunden. Die Zeitschrittweite beträgt 12 Stunden. Im Verlauf seiner Annäherung an den Strahlstrom tritt der TC als ET-System zunehmend mit dem Strahlstrom in Wechselwirkung. Vor allem durch eine Überlagerung in der oberen Troposphäre aus dem Sturm austretender Luft mit dem Strahlstrom kommt es zu der Herausbildung eines Jetstreaks. Des Weiteren bildet sich ein Rücken-Trog-Paar unmittelbar stromabwärts des ET-Systems. Daraufhin setzt dort in der linken Ausgangsregion des Jetstreaks und auf der Vorderseite des zu dem induzierten Rücken-Trog-Paar gehörenden Trog eine schnelle Zyklonogenese ein. Das dabei entstehende Tiefdrucksystem ist das primäre stromabwärts des ET-Systems induzierte Tief, dessen Entstehung Gegenstand der Untersuchung in dieser Arbeit ist. Seine Entwicklung wird von einer ausgeprägten Anomalie in der Höhenströmung dominiert. Im weiteren Verlauf weist das primäre stromabwärts von ET induzierte Tief eine recht komplexe Frontenstruktur auf: Warme und feuchte Luft wird um sein Rotationszentrum bewegt, und es kann eine sich um das Tiefzentrum "herumwickelnde" Warmfront (*engl.*: bent-back-warmfront) identifiziert werden. Zum Ende des Modell-Laufs ist das ET-System immer noch ein starkes extratropisches Tiefdruckgebiet und schwächt sich nur langsam ab. Die Frontalstruktur der primär stromabwärts induzierten Zyklone befindet sich bereits im Okklusions-Stadium. Abbildung 3.1 (übernommen von *Riemer et al., 2008*, Abbildung 2) zeigt die Entwicklung im Modell-Gebiet des numerischen Experiments von *Riemer et al. (2008)*. Gezeigt sind dort – für die zweite Hälfte des betrachteten Zeitraums – die Felder der potentiellen Temperatur und der Windgeschwindigkeit auf der dynamischen Tropopause sowie der Oberflächendruck. Man erkennt, wie der TC während seines ET-Prozesses zunehmend mit dem Strahlstrom wechselwirkt. Ab dem zweiten gezeigten Zeitpunkt erkennt man die Entwicklung des stromabwärts von ET induzierten Tiefs sowie – im weiteren Verlauf – die Entwicklung seiner Frontenstruktur.

Wie in *Riemer et al. (2008)* erläutert und dort anhand eines Hovmöller-Diagramms (siehe von Abbildung 5 aus *Riemer et al. (2008)* übernommene Abbildung 3.2) veranschaulicht wird, kann die Entwicklung des Rücken-Trog-Paares und die sich dieser anschließende Entwicklung des Wellenmusters als die Anregung und Ausbreitung eines Rossbywellenzuges interpretiert werden.

¹Die genaue Bezeichnung des in *Riemer et al. (2008)* benutzten Modells lautet: PSU/NCAR MM5V3

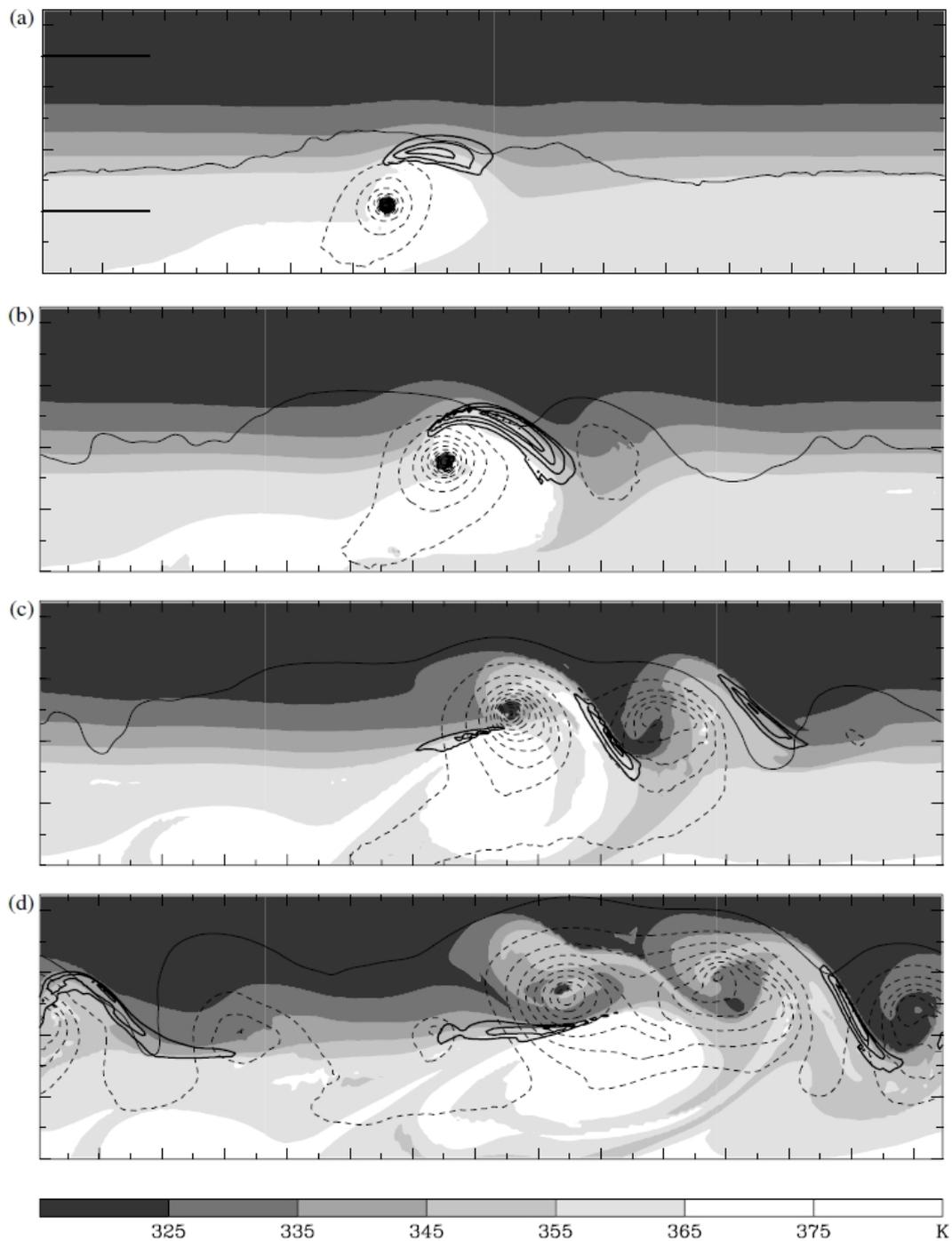


Abbildung 3.1: Abbildung 2 aus *Riemer et al.* (2008). Horizontalschnitt des Modell-Gebiets zwischen 14 und 65°N. Gezeigt sind die potentielle Temperatur (schattiert) und die Windgeschwindigkeit $> 45 \text{ m s}^{-1}$ (dicke Konturenlinien, alle 5 m s^{-1}) auf der dynamischen Tropopause (2 PVU) sowie der Oberflächendruck (dünne Konturenlinien, 995 hPa = durchgezogen, gestrichelt bei Werten $< 995 \text{ hPa}$, alle 5 hPa) für (a) 120 Stunden, (b) 156 Stunden, (c) 192 Stunden und (d) 240 Stunden. Der Abstand zwischen einer halben und vollen Achsenintervall-Markierung entspricht 600 km. Die zwei Linien auf der linken Seite von (a) kennzeichnen das zonale Band, welches dem Hovmöller-Diagramm (s.u.) zugrunde liegt.

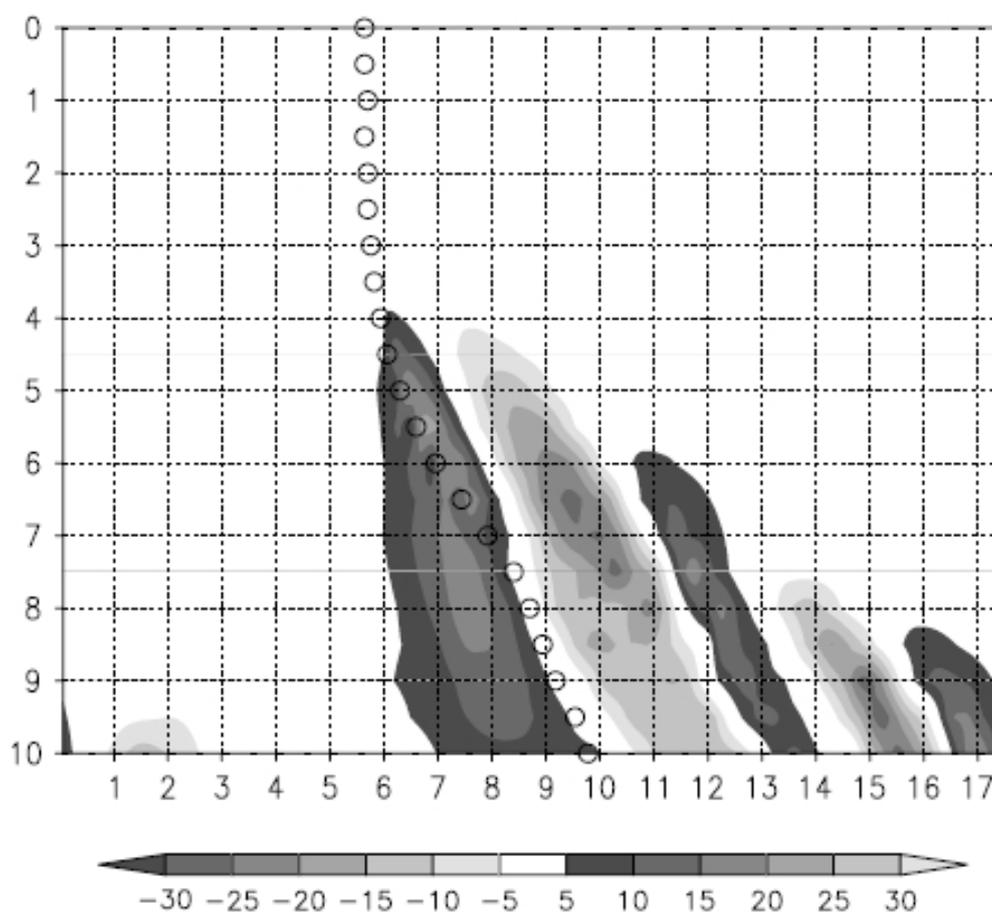


Abbildung 3.2: Abbildung 5 aus *Riemer et al. (2008)*. Hovmöller-Diagramm der meridionalen Windgeschwindigkeit auf 200 hPa in m s^{-1} gemittelt über das zonale Band mit einer Breite von 3000 km, welches durch die Linien in Abb. 2(a) gekennzeichnet ist. Heller werdende Schattierung: Südwinde; Dunkler werdende Schattierung: Nordwinde. Die x-Achse ist auf 10^3 km normiert und die y-Achse ist mit der Zeit in Tagen beschriftet. Die Kreise kennzeichnen die meridionale Position des ET-Systems.

3.2.2 Für die Inversion der Omega-Gleichung benötigte Daten

Als Eingangsdaten für die Berechnung der Antriebs-Terme für die Vertikalbewegung werden die Stromfunktion ψ zur Berechnung des divergenzfreien Windes $\mathbf{v}_\psi = \mathbf{k} \times \nabla_p \psi$ und das spezifische Volumen $\alpha = \rho^{-1} = \frac{R T}{p}$ benötigt. Für die statische Stabilität $\sigma = -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$ wird außerdem noch die (potentielle) Temperatur benötigt. Die Felder von ψ , α und θ wurden durch eine Interpolation der Modell-Daten auf 18 Druckflächen jeweils für 20 Zeitschritte erhalten, wobei bei der Interpolation für die unterste Druckfläche $p = 920$ hPa und für die oberste Druckfläche $p = 70$ hPa gewählt wurde. Das spezifische Volumen wurde dabei mit der virtuellen Temperatur ($\alpha = \frac{R T_v}{p}$) berechnet, wodurch der Feuchtegehalt der Luft berücksichtigt wurde. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Druckflächen, also die vertikale Gitterweite, beträgt 50 hPa. Die Daten liegen auf einer Druckfläche jeweils auf 288×141 (zonal \times meridional) Gitterpunkten vor. Die horizontale Gitterweite beträgt 60 km. Dabei fällt der südlichste Meridionalindex Null mit dem Äquator zusammen. Der Strahlstrom liegt etwa bei dem Meridionalindex 70. Der Abstand zwischen den Zeitschritten beträgt 12 Stunden.

3.3 Numerische Inversion der Omega-Gleichung

Um aus den Anteilen des dynamischen Antriebsterms die dynamische Vertikalbewegung zu erhalten, muss die Omega-Gleichung gelöst werden. Dies wurde für diese Arbeit mit der numerischen Methode der sukzessiven Überrelaxation (*engl.*: successive over-relaxation – SOR) mit Chebyshev-Beschleunigung, wie es in *Press et al.* (2001) empfohlen wird, getan.

Die Beschreibung der SOR und ihrer Anwendung für verschiedene Varianten der Omega-Gleichung – darunter jene der beiden AB-Versionen (Gleichungen (2.27) und (2.30)) – befindet sich im Anhang dieser Arbeit.

4. Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse dieser Arbeit dargestellt und besprochen. Zunächst wird die Entstehung sowie die allgemeine Entwicklung der stromabwärts des ET-Systems induzierten Zyklone erläutert. Der Schwerpunkt liegt hierbei auf der damit verbundenen Vertikalbewegung. Dann wird die verwendete Vertikalbewegung mit der Modell-Vertikalbewegung verglichen, um die Anwendbarkeit ersterer zu prüfen. Danach werden die Unterschiede zwischen den mit den beiden im Grundlagenteil vorgestellten Versionen der Alternativen Balance berechneten Vertikalbewegungen gezeigt und die Entscheidung für die aus den Konvertierungsformeln aus Davies-Jones (1991) erhaltene Version begründet. Anschließend wird auf die vertikale Struktur der Vertikalbewegung eingegangen. Schließlich werden die der Aufteilung von Jusem & Atlas (1998) entsprechenden Anteile der Vertikalbewegung gezeigt und hinsichtlich der Bedeutung von Jetstreak und Höhentrog bei der stromabwärts des ET-Systems induzierten Zyklognese interpretiert. Dabei wird auch auf die Rolle des Shapiro-Effekts für das Muster der Vertikalbewegung eingegangen.

4.1 Die allgemeine Entwicklung der stromabwärts induzierten Zyklone

Wie zuvor bereits erläutert wurde, sind die beiden wesentlichen Prozesse, welche zur stromabwärts induzierten Zyklognese bei ET beitragen können, die Herausbildung eines Jetstreaks einerseits und die Entstehung eines Rücken-Trog-Paares in der Höhe andererseits. Beide Prozesse lassen sich in den für diese Arbeit verwendeten Daten gut identifizieren. In diesem Abschnitt wird einführend untersucht, wie sich die Entwicklung der Zyklognese und der mit ihr verbundenen Vertikalbewegung im Allgemeinen verhält.

Die Abbildungen 4.1 bis 4.4 zeigen die Entwicklung der gesamten aus dem Q-Vektor erhaltenen Vertikalgeschwindigkeit ω auf 520 hPa, einmal im beinahe gesamten Modell-Gebiet (Abbildung 4.1 bis Abbildung 4.2) und nur in einem Gebiet stromabwärts des ET-Systems (Abbildung 4.3 bis Abbildung 4.4). Zusätzlich ist jeweils

der Verlauf der mit dem breitenabhängigen Coriolis-Parameter f_{cor} über $\Phi = f_{cor} \psi$ auf Einheiten des Geopotentials skalierten¹ Stromfunktion auf 220 hPa und auf 920 hPa, die Windgeschwindigkeit auf 220 hPa sowie die potentielle Temperatur auf 870 hPa gezeigt. Dadurch lassen sich der Höhentrog, der Jetstreak sowie das ET-System und die Entwicklung der von ihm stromabwärts induzierten Zyklone erkennen. An den bodennahen Isentropen erkennt man außerdem die thermische Entwicklung der frontalen Struktur der induzierten Zyklone.

Ein Aufsteigen unmittelbar stromabwärts des ET-Systems zeigt sich in der gesamten aus dem dynamischen Antriebsterm $F = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}$ berechneten Vertikalbewegung ω erstmals nach 132 Stunden deutlich (Abbildung 4.1(a) und Abbildung 4.3(a)). Zu diesem Zeitpunkt ist das Zentrum des ET-Systems gerade in den Strahlstrom-Bereich eingedrungen und man erkennt bereits ein deutliches Jetstreak-Muster sowie ein langwelliges Rücken-Trog-Paar unmittelbar stromabwärts des ET-Systems. Im Bereich des betragsmäßig größten meridionalen Temperaturgradienten weist die Vertikalgeschwindigkeit in Druckkoordinaten ω auf der Vorderseite des Höhentrog auf 520 hPa in einem Gebiet, das etwa 1000 Kilometer östlich der linken Ausgangsregion des Jetstreaks liegt, Werte von etwa $-0,02 \text{ Pa s}^{-1}$ auf. Im bodennahen Geopotential erkennt man bereits deutlich eine Austrogung anhand der Krümmung der im Bereich des Aufsteigens östlich des Jetstreaks gezeichneten Kontur. Im Bereich dieser Austrogung kann man durch die Krümmung der bodennahen Isentropen erkennen, dass dort Warmluftadvektion stattfindet. Dieses trogvorderseitige Gebiet mit bodennaher Warmluftadvektion liegt gerade unter dem Bereich der stärksten aufwärts gerichteten Vertikalbewegung auf 520 hPa östlich des Jetstreaks und auf der Vorderseite des Höhentrog. Aufgrund dieser Konstellation liegt es nahe, hier von einer für Typ-B-Zyklogese (siehe *Pettersen & Smebye*, 1971)² typischen Situation zu sprechen.

12 Stunden später, also nach 144 Stunden (Abbildung 4.1(b) und Abbildung 4.3(b)), hat sich das ET-System durch die Wechselwirkung mit dem Strahlstrom einige hundert Kilometer nach Osten verlagert, wobei sich sowohl das Rücken-Trog-Paar in der Höhe als auch der Jetstreak intensiviert haben. Letzterer weist in seinem Zentrum nun schon Windgeschwindigkeiten von über 50 m s^{-1} auf und zeigt in seiner Struktur eine leichte Krümmung. Auch das Gebiet großskaligen Aufsteigens auf 520 hPa östlich des Jetstreaks ist mit Werten von teilweise etwa $-0,04 \text{ Pa s}^{-1}$ ausgeprägter als 12 Stunden zuvor. Im bodennahen Geopotential zeigt sich in diesem Gebiet nun schon eine, bei dem gewählten Konturenintervall, geschlossene Kontur.

Nach 156 Stunden (Abbildung 4.2(a) und Abbildung 4.4(a)) hat sich das Tief, wie am bodennahen Geopotential zu erkennen ist, deutlich intensiviert. Auch die Windgeschwindigkeit im Jetstreak sowie dessen Krümmung und die Amplitude des Höhentrog haben deutlich zugenommen. Im vorderseitigen Bereich des stromabwärts entstandenen Tiefdruckgebietes besitzt die Vertikalgeschwindigkeit teilweise Werte von etwa $-0,08 \text{ Pa s}^{-1}$. Ferner erkennt man anhand der Krümmung der Isentropen

¹Der von der geographischen Breite abhängige Coriolis-Parameter f_{cor} wurde – wie in *Riemer et al.* (2008, siehe Abschnitt 2 ebd.) – für diese Skalierung über $f_{cor} = 2\Omega \sin(d/A)$, mit $\Omega = 7,2921 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, dem Erdradius $A = 6370 \text{ km}$ und der Distanz vom Äquator d bestimmt.

²In *Pettersen & Smebye* (1971) wird der Begriff Typ-B-Zyklogese u.a. durch starke positive Vorticity-Advektion auf der Vorderseite eines Höhentrog, die über einem Gebiet mit Warmluftadvektion (oder nahezu abwesender Kaltluftadvektion) stattfindet, definiert.

in Bodennähe Warmluftadvektion auf der Vorderseite und Kaltluftadvektion auf der Rückseite des Tiefdruckgebietes.

Weitere 12 Stunden später, nach 168 Stunden (Abbildung 4.2(b) und Abbildung 4.4(b)), ist die Achse des Jetstreaks von der ursprünglich zonalen Ausrichtung um 45 Grad im Uhrzeigersinn verschoben, so dass die Windrichtung im Jetstreak nun in etwa Nord-West ist. Ansonsten unterscheidet sich das Muster qualitativ nicht stark von dem 12 Stunden zuvor. Das Tiefdruckgebiet hat sich weiter intensiviert und die Vertikalbewegung auf seiner Vorderseite erreicht nun teilweise Werte von $-0,1 \text{ Pas}^{-1}$ und darunter. Außerdem hat sich die Struktur des Aufsteigens im Bereich des Tiefs auch qualitativ verändert. Das Maximum des Aufsteigens kann nun mit seiner sich entwickelnden Warmfront in Verbindung gebracht werden.

Bei den nun folgenden eingehenderen Analysen der Daten, werden ausschließlich diese vier Zeitpunkte betrachtet. In Bezug auf das stromabwärts induzierte Tiefdruckgebiet wird bei den ersten beiden Zeitpunkten $t = 132 \text{ h}$ und $t = 144 \text{ h}$ (Abbildung 4.1 und Abbildung 4.3) von der Entstehungsphase und bei den letzten beiden Zeitpunkten $t = 156 \text{ h}$ und $t = 168 \text{ h}$ (Abbildung 4.2 und Abbildung 4.4) von der Intensivierungsphase gesprochen.

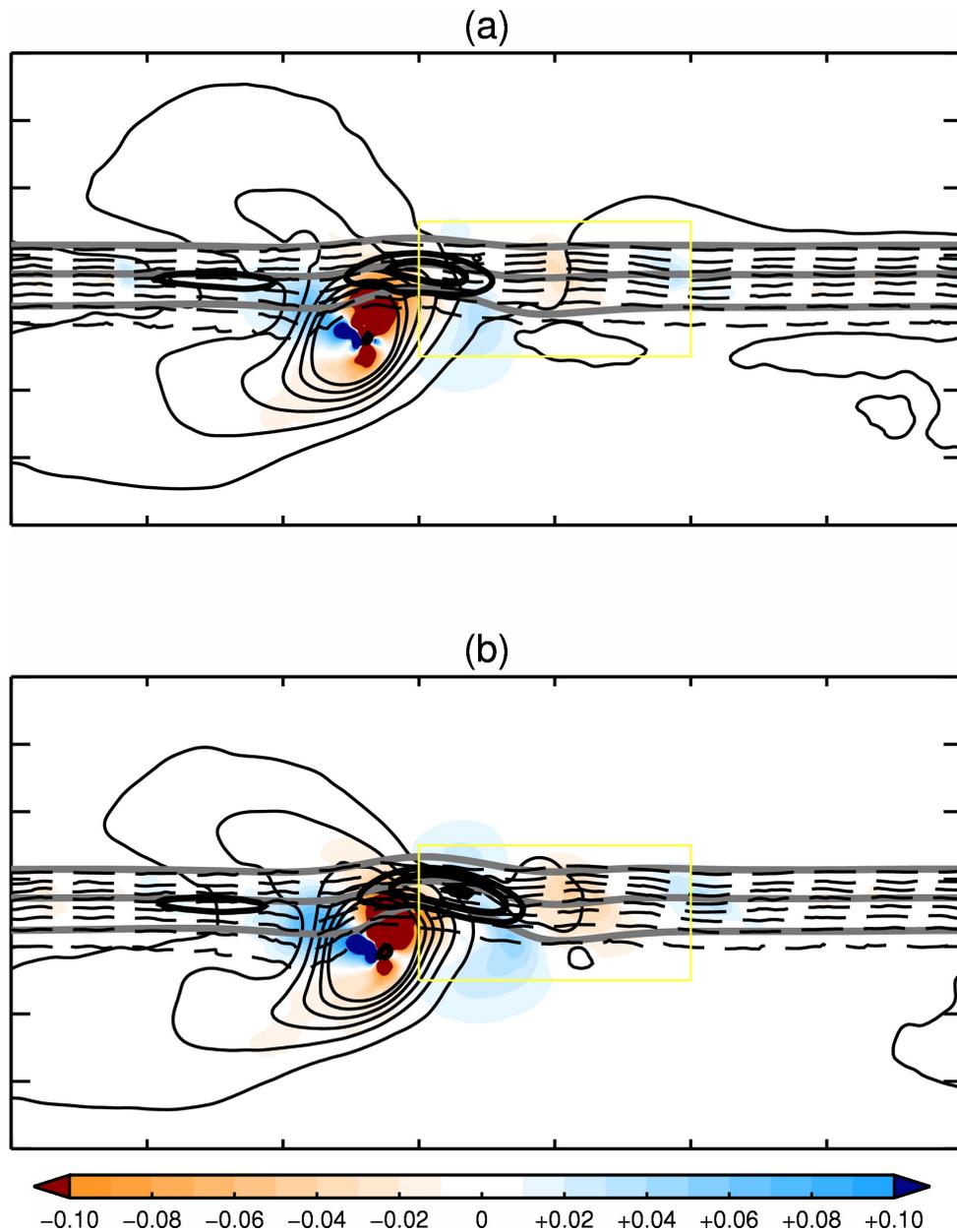


Abbildung 4.1: Vertikalbewegung ω (Farben – Skala in Pa s^{-1}) auf 520 hPa. Die dünnen durchgezogenen Linien zeigen die über $\Phi = f_{cor} \psi$ auf Einheiten des Geopotentials skalierte Stromfunktionsabweichung von einem beliebigen Referenzwert ψ_{920} auf 920 hPa (Konturenintervall: $80 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$). Die Markierungen an diesen Geopotential-Konturen zeigen in Richtung niedrigeren Geopotentials. Die dicken grauen Linien zeigen die ebenso über $\Phi = f_{cor} \psi$ auf Einheiten des Geopotentials skalierte Stromfunktionsabweichung von einem beliebigen Referenzwert ψ_{220} auf 220 hPa (Konturenintervall: $2000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, nach Norden hin abfallend). Die dünnen gestrichelten Linien zeigen die potentielle Temperatur auf 870 hPa (von 304 Kelvin im Süden, absteigend alle 2 Kelvin, bis 290 Kelvin im Norden). Die dicken durchgezogenen Linien zeigen den Betrag der Geschwindigkeit des divergenzfreien Windes auf 220 hPa (mit zunehmender Liniendicke bei 40 m s^{-1} , 45 m s^{-1} und 50 m s^{-1}). Die zonale Achse (Abszissenachse) läuft von 0 km bis 16800 km, wobei alle 2400 km eine Markierung gesetzt ist. Die meridionale Achse (Ordinatenachse) läuft von 0 km bis 8400 km, wobei alle 1200 km eine Markierung gesetzt ist. Die rechteckige gelbe Markierung definiert den Bereich von vorrangigem Interesse stromabwärts von ET.

Bei (a): $t = 132 \text{ h}$ und bei (b): $t = 144 \text{ h}$.

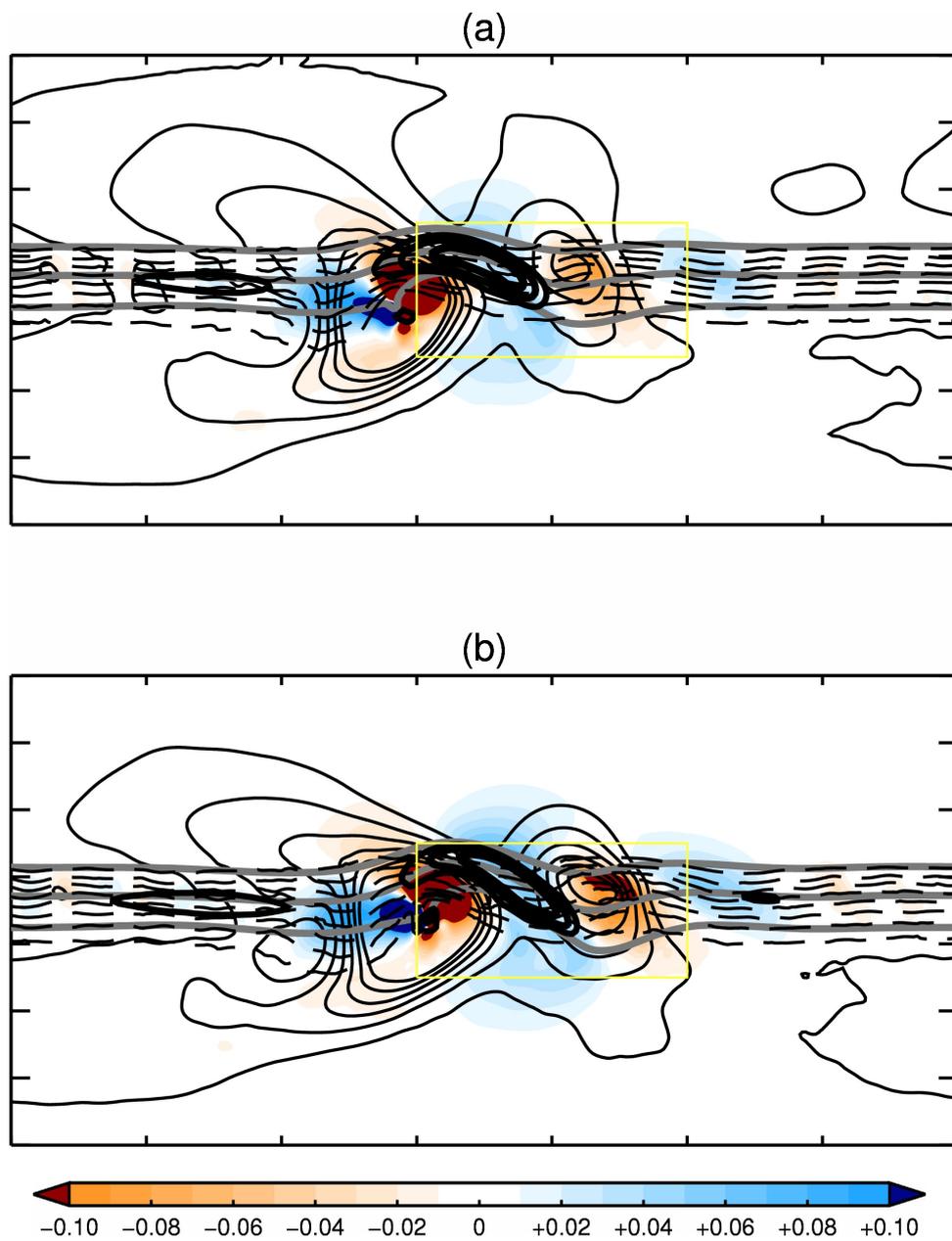


Abbildung 4.2: Wie Abbildung 4.1, aber bei:

(a): $t = 156$ h,(b): $t = 168$ h.

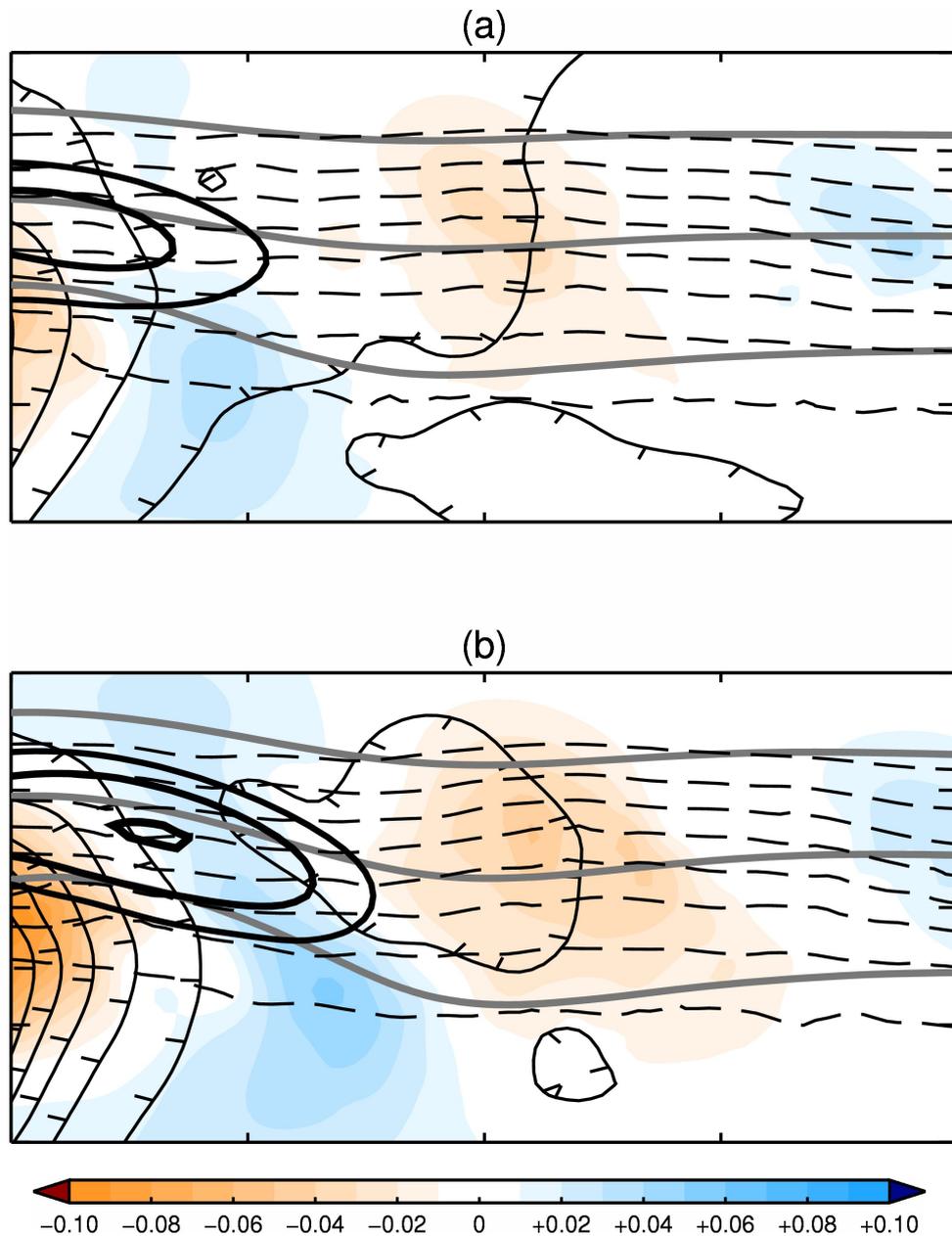


Abbildung 4.3: Vertikalbewegung ω (Farben – Skala in Pas^{-1}) auf 520 hPa in dem Gebiet von vorrangigem Interesse stromabwärts von ET (siehe gelbe Markierung in Abbildung 4.1 und Abbildung 4.2). Konturen so wie bei Abbildung 4.1 und Abbildung 4.2. Die zonale Achse (Abszissenachse) läuft von 7200 km bis 12000 km, wobei alle 1200 km eine Markierung gesetzt ist. Die meridionale Achse (Ordinatenachse) läuft von 3000 km bis 5400 km, wobei alle 600 km eine Markierung gesetzt ist.

(a): $t = 132$ h,
 (b): $t = 144$ h.

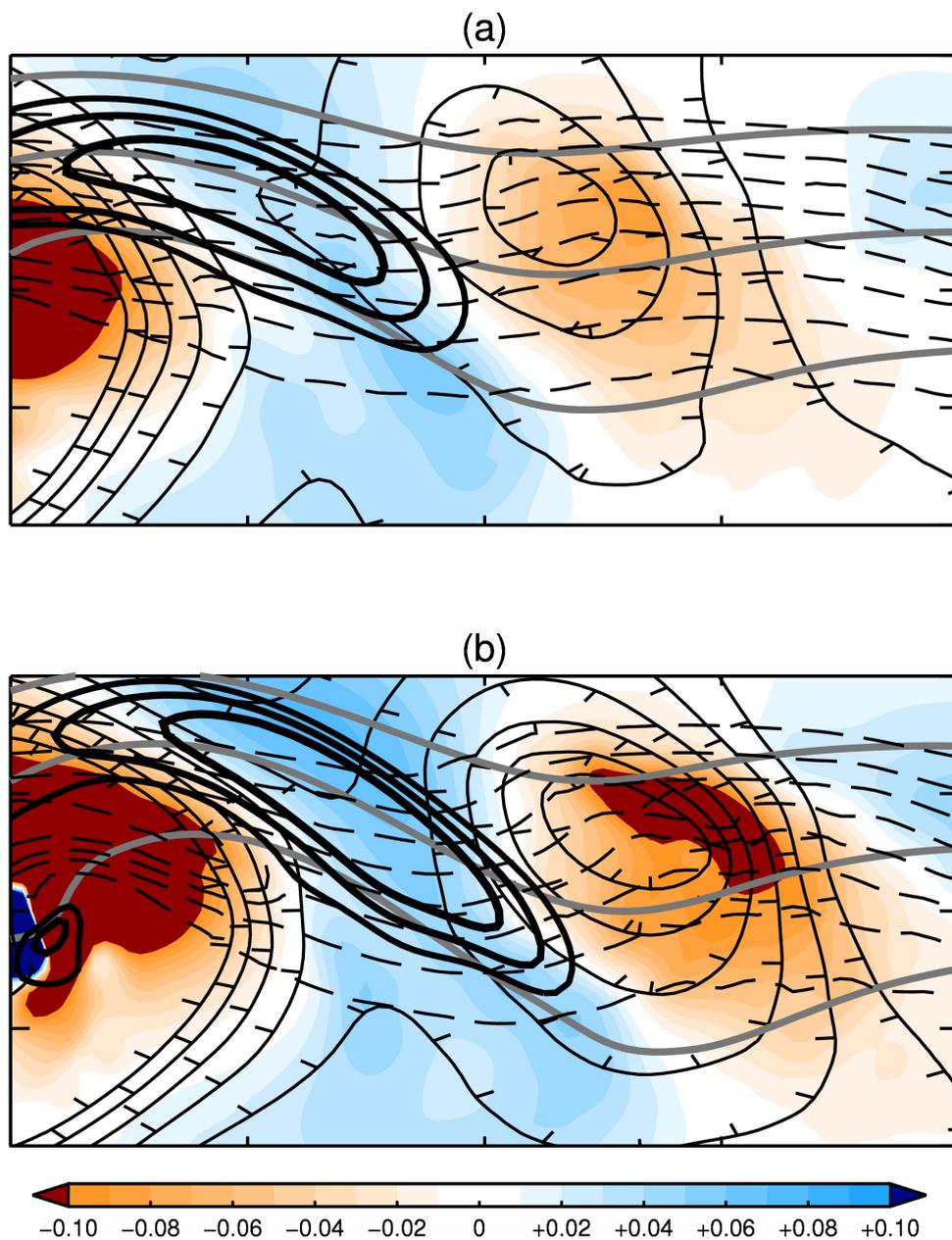


Abbildung 4.4: Wie Abbildung 4.3, aber bei:

(a): $t = 156$ h,(b): $t = 168$ h.

4.2 Vergleich mit Modell-Vertikalbewegung

Die Abbildungen 4.5 bis 4.8 zeigen jeweils oben die aus dem dynamischen Antriebsterm erhaltene Vertikalbewegung ω und unten die zum Vergleich über die näherungsweise gültige Formel $\omega_m = -g \rho w_m$ umgerechnete aus dem hier verwendeten MM5-Modell-Lauf stammende Vertikalgeschwindigkeit w_m auf 520 hPa. Die Modell-Vertikalbewegung ω_m zeigt demnach eine auf deutlich kleineren Skalen vorhandene Variabilität als erstere, die in erster Linie durch im Modell zusätzlich berücksichtigte diabatische und konvektive Prozesse zu erklären sein dürfte, welche die allein aus dem dynamischen Antriebsterm resultierende Vertikalbewegung überlagern.

Für diese Erklärung der kleinerskaligen Variabilität der Modell-Vertikalbewegung spricht, dass man die für konvektive Prozesse typischen sehr kleinskaligen starken Minima und Maxima nur in der Modell-Vertikalbewegung erkennt. In der allein aus dem dynamischen Antriebsterm resultierenden Vertikalbewegung zeigen sie sich hingegen nicht. Sie sind in erster Linie im tropischen Bereich südlich des Strahlstroms auszumachen, wo wegen der größeren Menge an (latenter) Wärme auch verstärkte konvektive Aktivität zu erwarten ist.

Wie man sieht, stimmt trotz dieser Überlagerung das größerskalige Muster der allein aus dem dynamischen Antriebsterm resultierenden Vertikalbewegung recht gut mit dem der Modell-Vertikalbewegung überein. Insgesamt scheint erstere gut in letztere eingebettet zu sein. Es erscheint deshalb plausibel, die aus dem dynamischen Antriebsterm resultierende Vertikalbewegung als einen Bestandteil der Modell-Vertikalbewegung anzusehen.

Insbesondere im Bereich der stromabwärts des ET-Systems entstehenden Zyklone wird diese Übereinstimmung des größerskaligen Musters als ausreichend erachtet, um dort die Zyklognese mit der nur aus dem dynamischen Antriebsterm resultierenden Vertikalbewegung zu untersuchen. Denn gerade in diesem Bereich ist die Übereinstimmung, sowohl der räumlichen Lage als auch der Größenordnung des Bereichs in dem nennenswertes Aufsteigen vorliegt, recht groß. Sowohl in ω als auch in ω_m zeigt sich dort ein größerskaliges zusammenhängendes Gebiet mit Aufsteigen, welches sich gut mit dem sich entwickelnden stromabwärts von ET induzierten Tiefdruckgebiet in Zusammenhang bringen lässt.

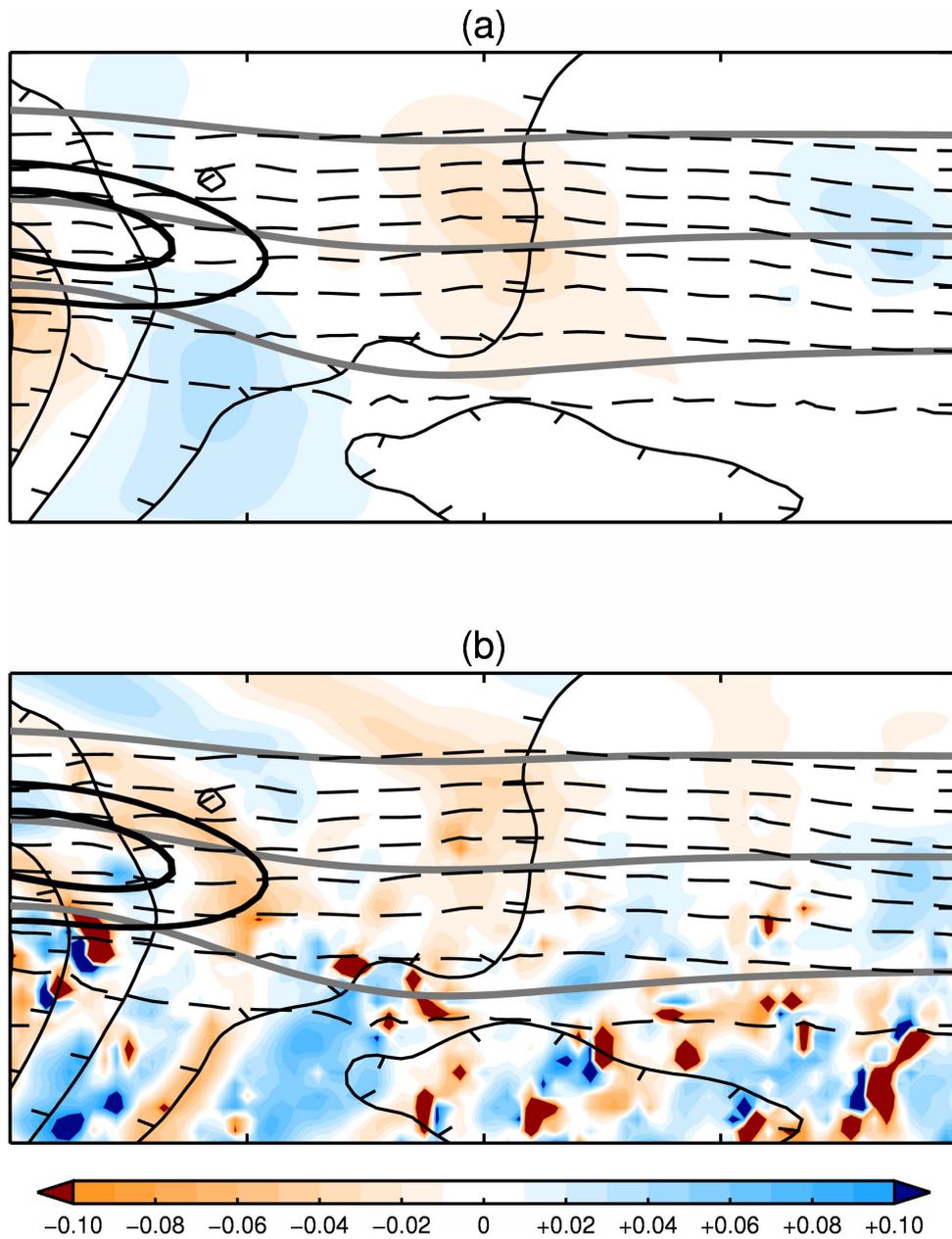
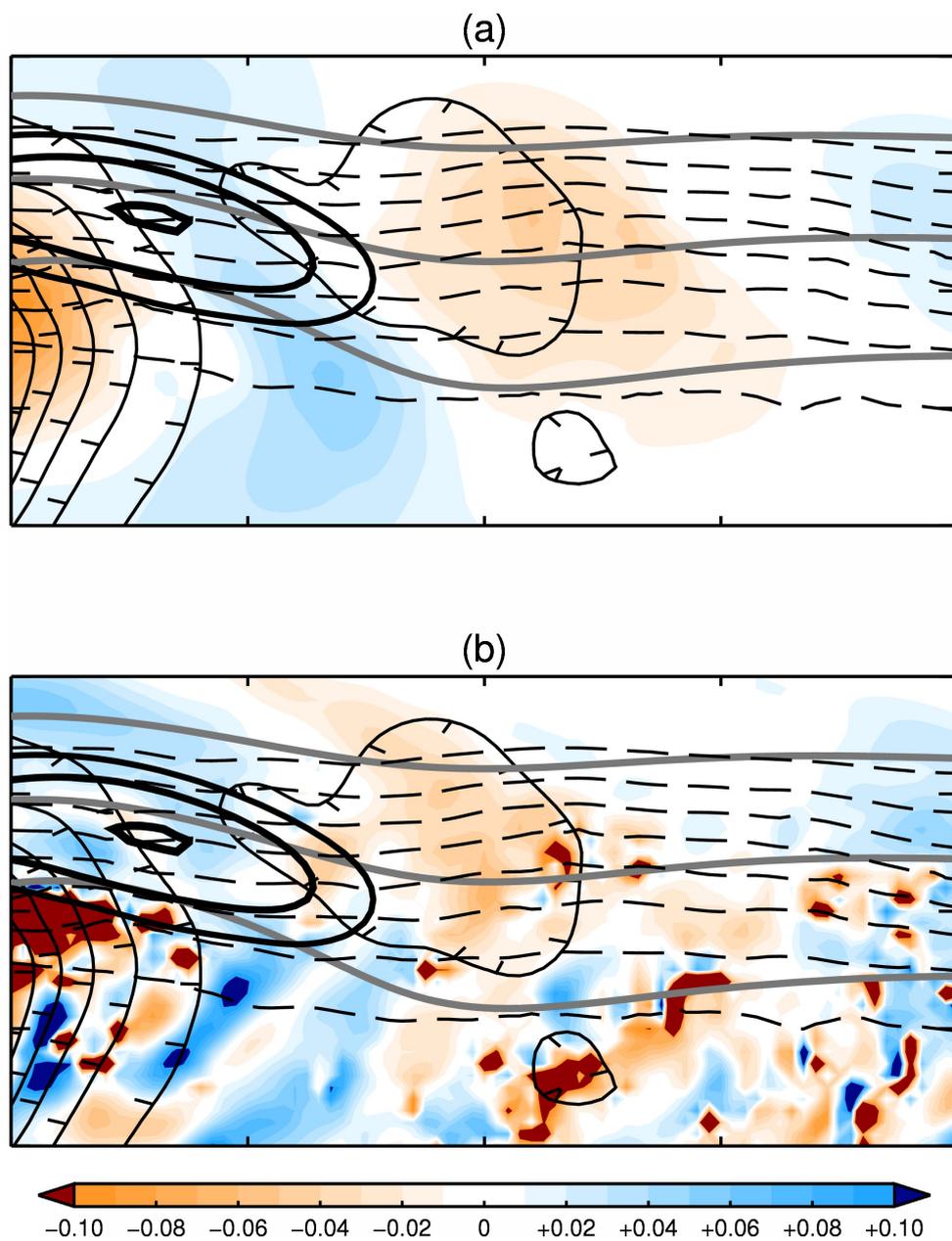


Abbildung 4.5: (a): ω .
 (b): Umgerechnete Modell-Vertikalbewegung $\omega_m = -g\rho w_m$.
 Jeweils bei $t = 132$ h.
 Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

Abbildung 4.6: Wie Abbildung 4.5, aber bei $t = 144$ h.

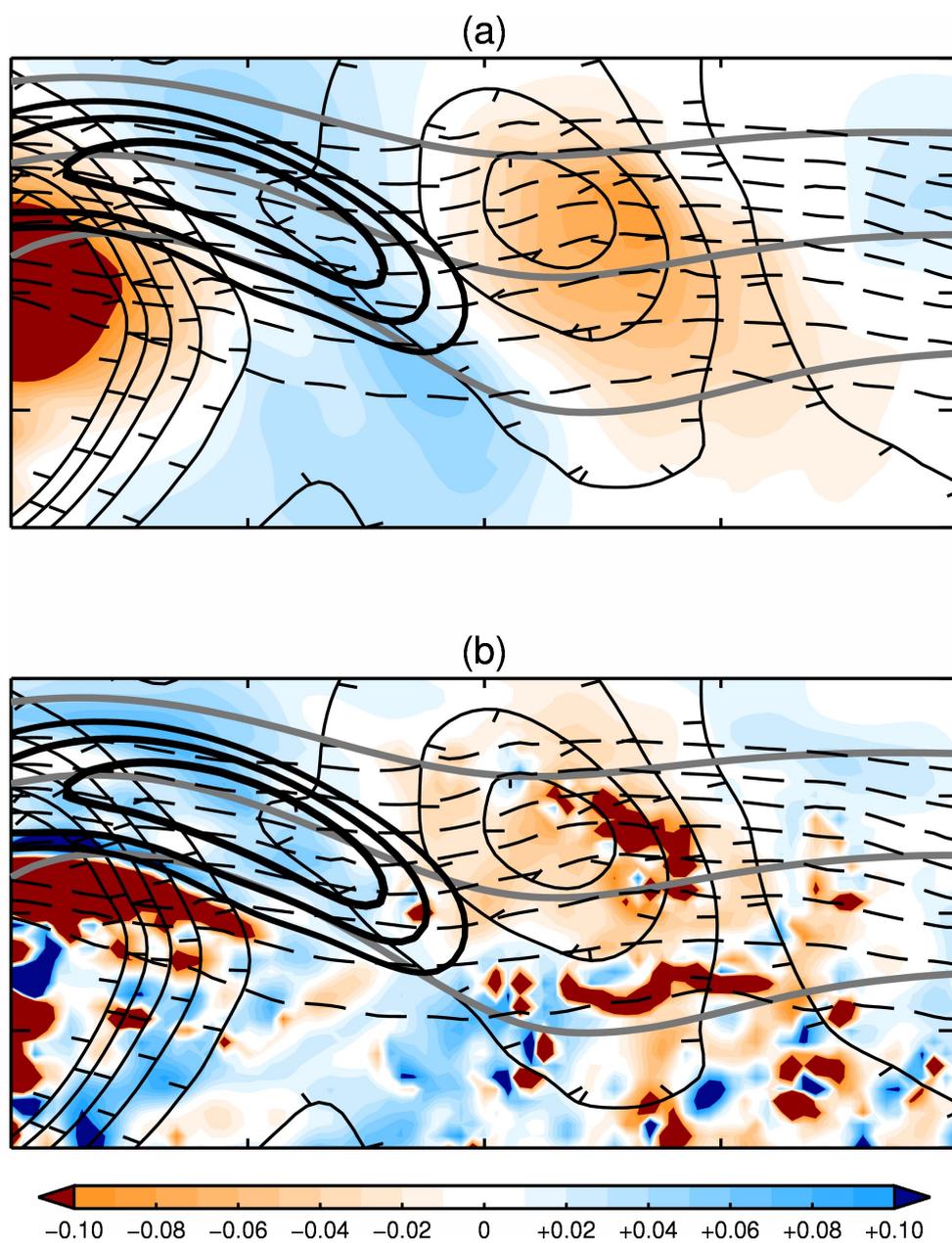
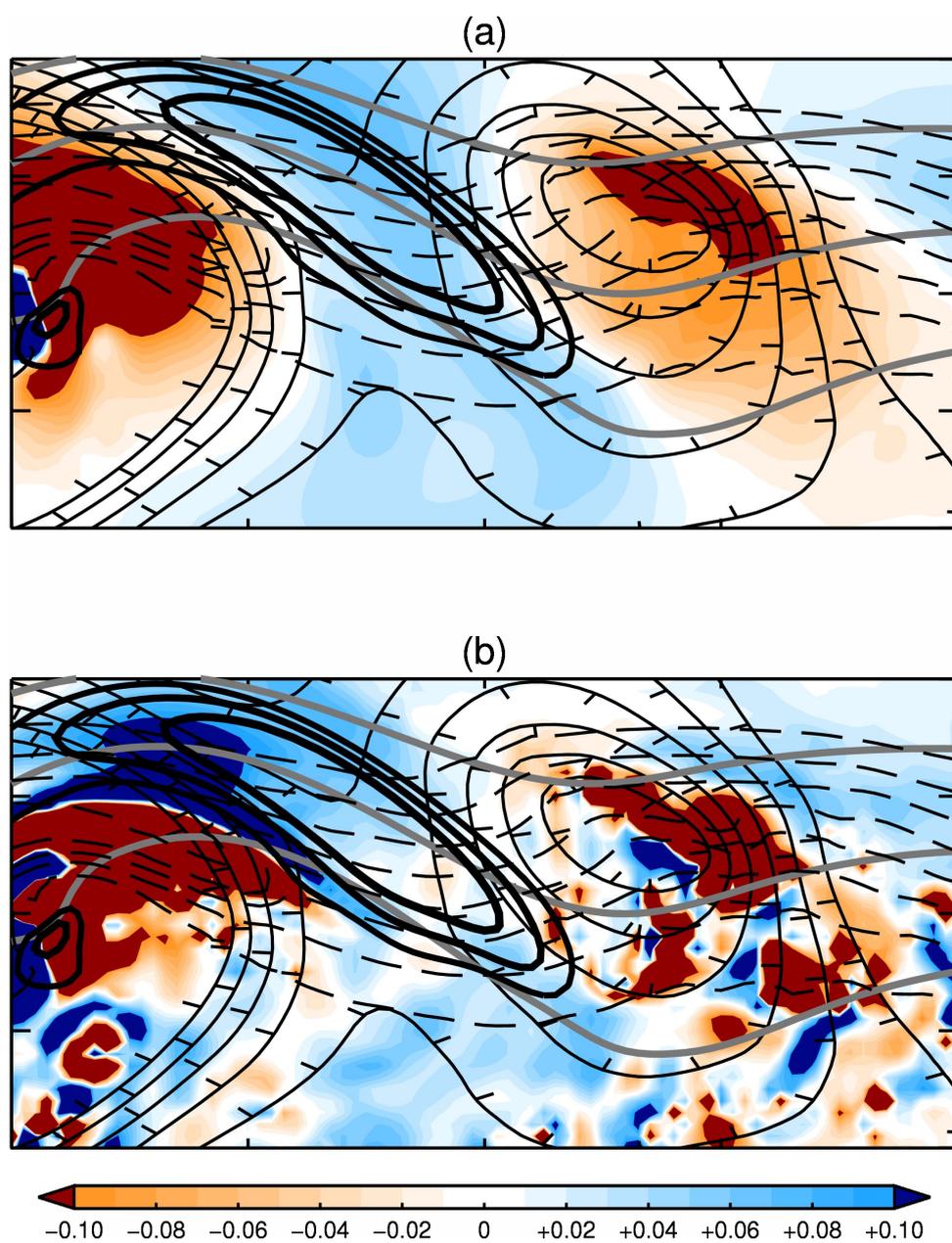


Abbildung 4.7: Wie Abbildung 4.5, aber bei $t = 156$ h.

Abbildung 4.8: Wie Abbildung 4.5, aber bei $t = 168$ h.

4.3 Wahl der Version der Omega-Gleichung mit Alternativer Balance

Im Grundlagenteil wurden zwei verschiedene Versionen der Omega-Gleichung mit Alternativer Balance besprochen. Eine davon wurde mit Hilfe der Konvertierungsformeln aus *Davies-Jones* (1991) hergeleitet, die andere wurde in *Mallet et al.* (1999) verwendet. Die Abbildungen 4.9 und 4.10 zeigen die Vertikalbewegung stromabwärts des ET-Systems für die Zeiten $t = 132$ h und $t = 144$ h. Dabei ist bei Abbildung 4.9 – so wie auch bei allen bisher gezeigten Abbildungen in diesem Kapitel – die mit Hilfe der Konvertierungsformeln aus *Davies-Jones* (1991) hergeleitete Version der AB-Omega-Gleichung verwendet worden. Bei Abbildung 4.10 wurde hingegen die AB-Omega-Gleichung nach *Mallet et al.* (1999) verwendet. Wie man sieht, gibt es nur geringe Unterschiede zwischen den beiden Versionen.

Die Entscheidung bei der Wahl für die Verwendung bei der Analyse der Ergebnisse fiel zu Gunsten der mit Hilfe der Konvertierungsformeln aus *Davies-Jones* (1991) hergeleiteten Version der AB-Omega-Gleichung aus, da bei dieser die Werte der Vertikalbewegung vom Betrag her offenbar etwas größer sind und somit eine Bewertung etwas leichter fällt. Das Muster der Vertikalbewegung, also die Verteilung der Zonen mit Aufsteigen bzw. Absinken, ist aber bei beiden Versionen nahezu deckungsgleich. Da es bei der vergleichenden Bewertung der Bedeutung von Jetstreak und Höhentrog weniger auf die absoluten Werte der nach *Jusem & Atlas* (1998) partitionierten Vertikalbewegung, als vielmehr auf die Verhältnisse dieser zueinander ankommt, wurde die quantitative Übereinstimmung mit der tatsächlichen Vertikalbewegung bei dieser Entscheidung nicht betrachtet.

Auch ist diese Entscheidung keinesfalls als eine Wertung der Genauigkeit zu Gunsten der hier gewählten Version der AB-Omega-Gleichung zu verstehen. Eine vergleichende Untersuchung der Genauigkeit der beiden verschiedenen Versionen der AB-Omega-Gleichung wäre sicherlich interessant, würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

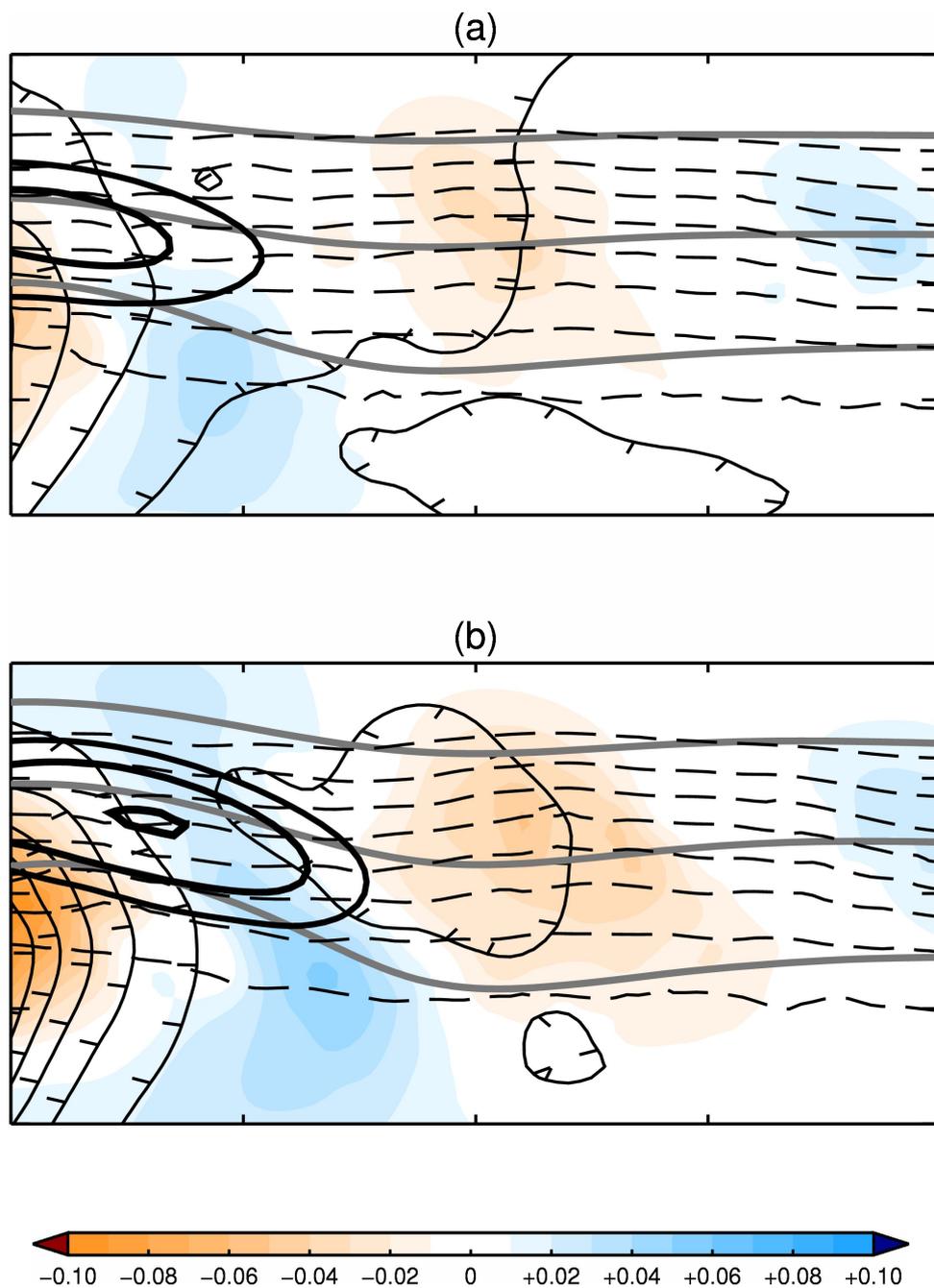


Abbildung 4.9: Genau wie Abbildung 4.3 mit:

(a): $t = 132$ h,

(b): $t = 144$ h.

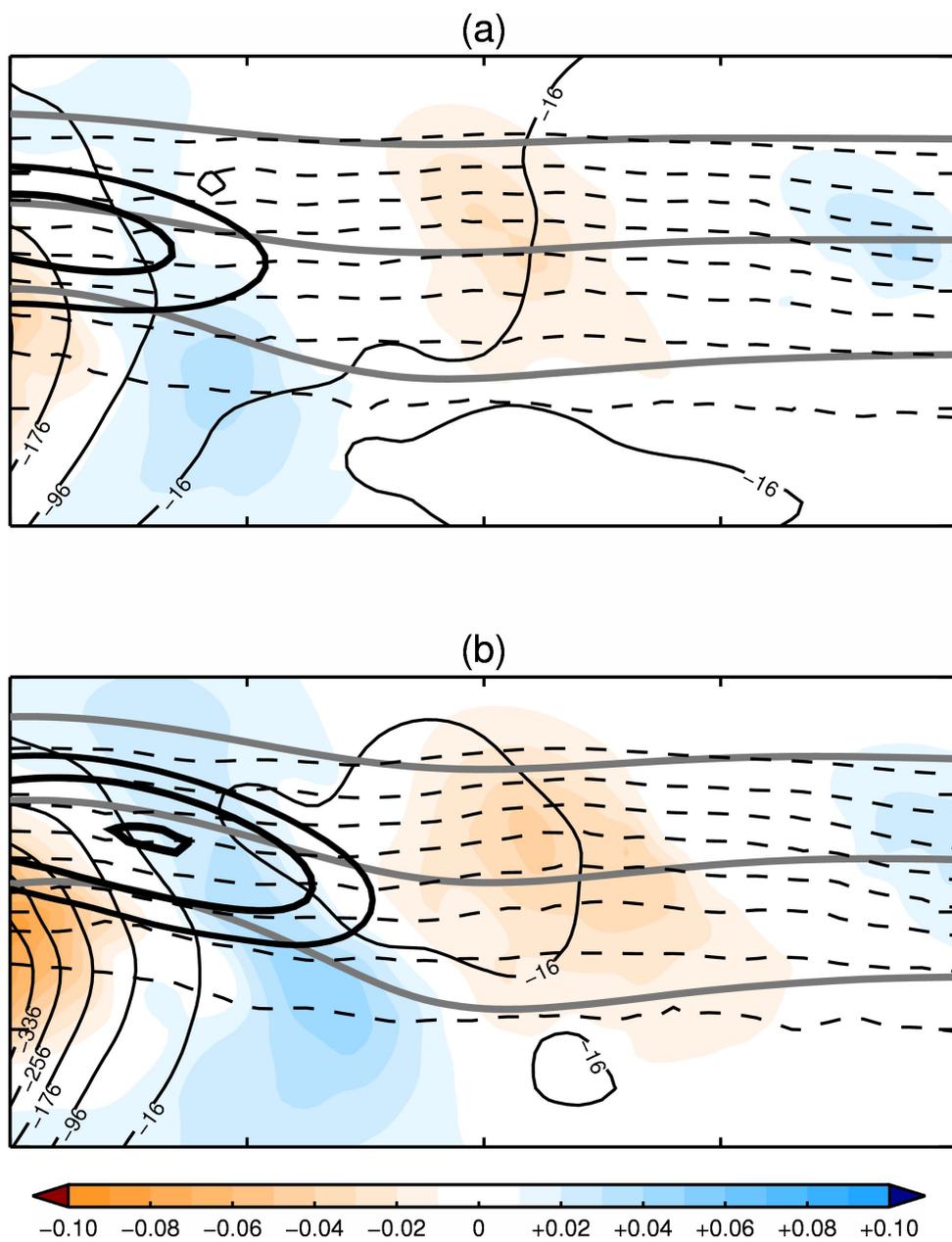


Abbildung 4.10: Wie Abbildung 4.9, aber mit AB nach *Mallet et al.* (1999).

4.4 Die vertikale Struktur der Vertikalbewegung

Die Abbildungen 4.13 bis 4.20 zeigen die Vertikalbewegung auf verschiedenen Druckflächen während der Entstehungs- und Intensivierungsphase der stromabwärts von ET induzierten Zyklone. Zusätzlich sind in den Abbildungen 4.11 und 4.12 Vertikalschnitte der Vertikalbewegung, die bei 4500 km auf der meridionalen Achse angefertigt wurden, gezeigt. Dieser Achsenabschnitt liegt etwa auf der Breite, auf der sich auch der Jetstreak befindet. Er wurde so gewählt, weil die Vertikalschnitte die Atmosphäre somit etwa auf der geographischen Breite mit der auf 520 hPa stärksten, mit der sich entwickelnden stromabwärts von ET induzierten Zyklone in Zusammenhang stehenden, Vertikalbewegung zeigen.

Die Vertikalbewegung zeigt stromabwärts des ET-Systems zu allen vier hier betrachteten Zeitpunkten eine sehr kohärente vertikale Struktur. Insbesondere in dem Bereich der stromabwärts von ET einsetzenden Zyklogenese sieht man in den gezeigten Vertikalschnitten eine über nahezu die gesamte Troposphäre ausgedehnte säulenartige Struktur aufsteigender Luft mit dem stärksten Aufsteigen in der mittleren Troposphäre. Die mit dieser Struktur verbundene starke Zunahme der Vertikalgeschwindigkeit mit der Höhe in kartesischen Koordinaten bzw. starke Abnahme der Vertikalgeschwindigkeit mit der Höhe in Druckkoordinaten ($\frac{\partial w}{\partial z} > 0$ bzw. $\frac{\partial \omega}{\partial z} < 0$) in der unteren Troposphäre begünstigt Zyklogenese durch Wirbelstreckung und die mit dieser verbundene Zunahme der Vorticity.

Des Weiteren ist anhand der Abbildungen 4.13 bis 4.20 zu erkennen, dass das Aufsteigen auf der Vorderseite der sich stromabwärts des ET-Systems entwickelnden Zyklone in der unteren Troposphäre (Abbildungen für $p = 720$ hPa) eine eher bandartige Struktur zeigt. Diese liegt jeweils in dem Gebiet, in dem man auch die sich entwickelnde Warmfront der stromabwärts des ET-Systems induzierten Zyklone erwartet. Auf höheren Druckflächen ist die Struktur hingegen eher zellenartig und außerdem ausgedehnter. Die im Mittel stärkste und ausgedehnteste Struktur dieses Aufsteigens sieht man jeweils auf der Druckfläche mit $p = 520$ hPa. Deshalb zeigen, bis auf die Abbildungen 4.13 bis 4.20, alle horizontalen Darstellungen der Vertikalbewegung in dieser Arbeit die Vertikalbewegung auf dieser Druckfläche.

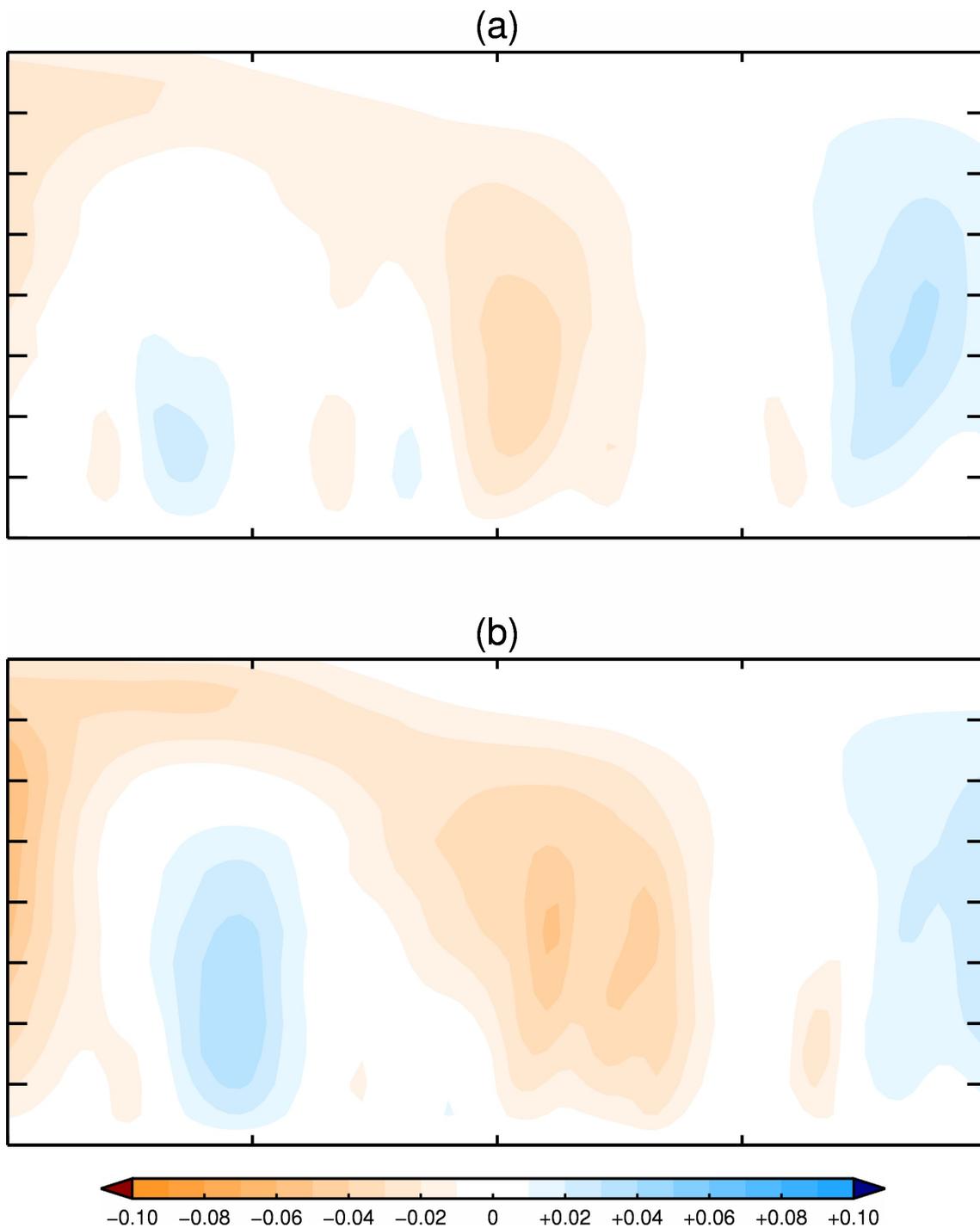


Abbildung 4.11: Vertikalschnitt der Vertikalbewegung ω (Farben – wie zuvor in Pa s^{-1}) bei 4500 km auf der meridionalen Achse, was dem Achsenabschnitt bei 5/8 der Ordinatenachsenlänge bei den vorigen Horizontalschnitten entspricht. Die Ordinatenachse läuft von 920 hPa bis 120 hPa, wobei alle 100 hPa eine Markierung gesetzt ist. Die zonale Achse (Abszissenachse) läuft auch hier von 7200 km bis 12000 km, wobei alle 1200 km eine Markierung gesetzt ist.

(a): $t = 132$ h,

(b): $t = 144$ h.

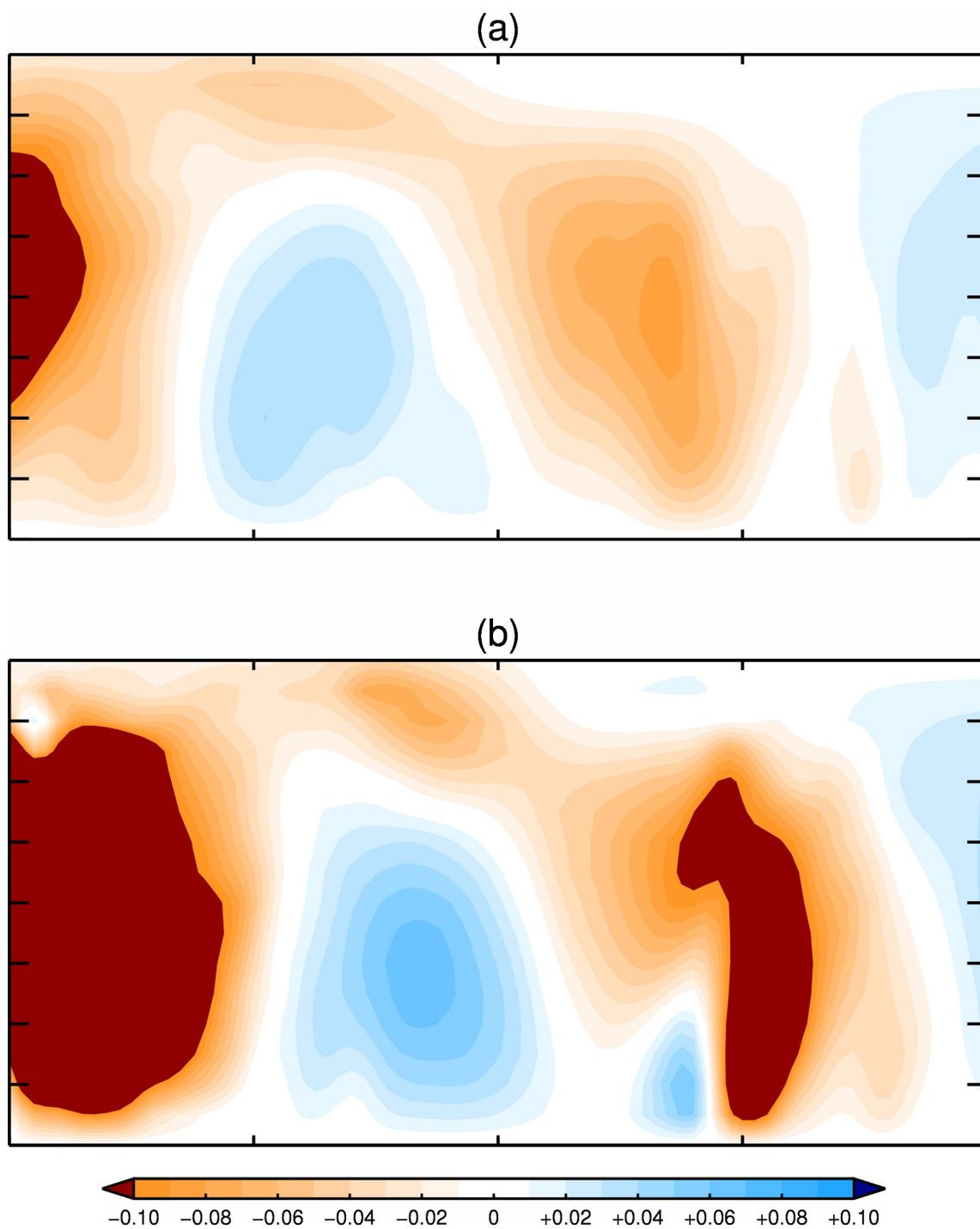


Abbildung 4.12: Wie Abbildung 4.11, aber bei:

(a): $t = 156$ h,(b): $t = 168$ h.

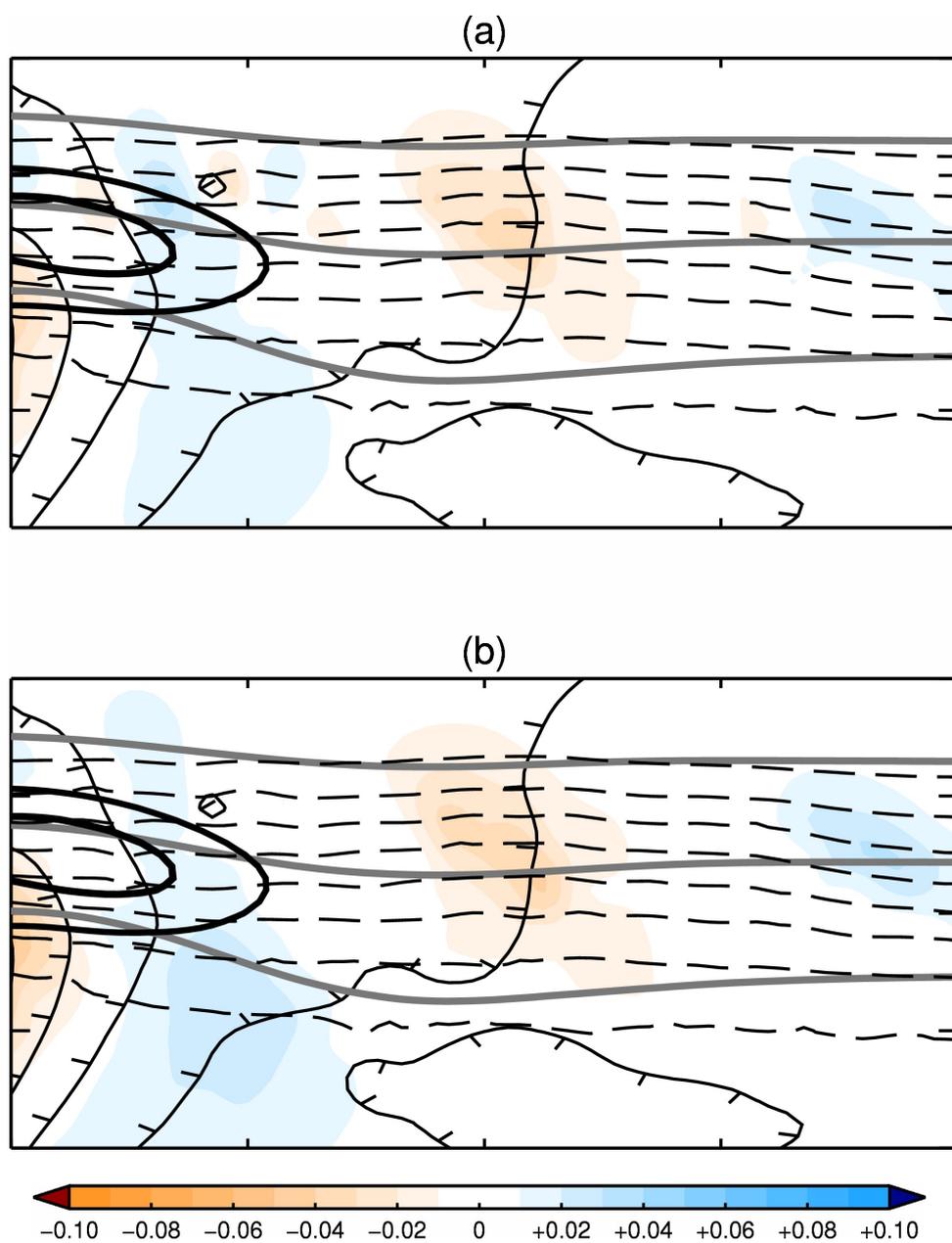


Abbildung 4.13: Vertikalbewegung ω auf verschiedenen Druckflächen bei dem Zeitpunkt $t = 132$ h. Ansonsten wie Abbildung 4.3.

(a): $p = 720$ hPa,

(b): $p = 620$ hPa.

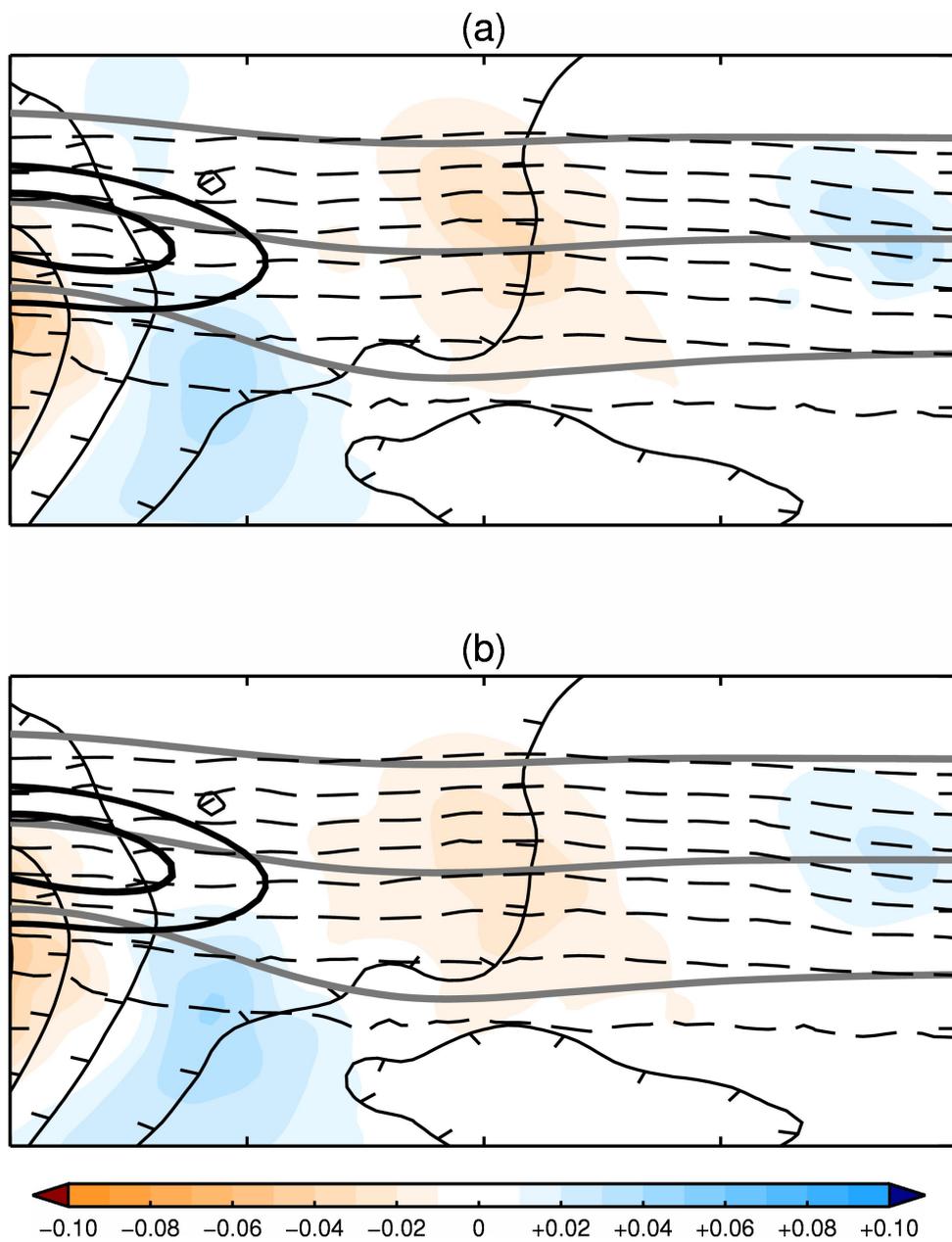


Abbildung 4.14: Wie Abbildung 4.13, aber für:

(a): $p = 520$ hPa,(b): $p = 420$ hPa.

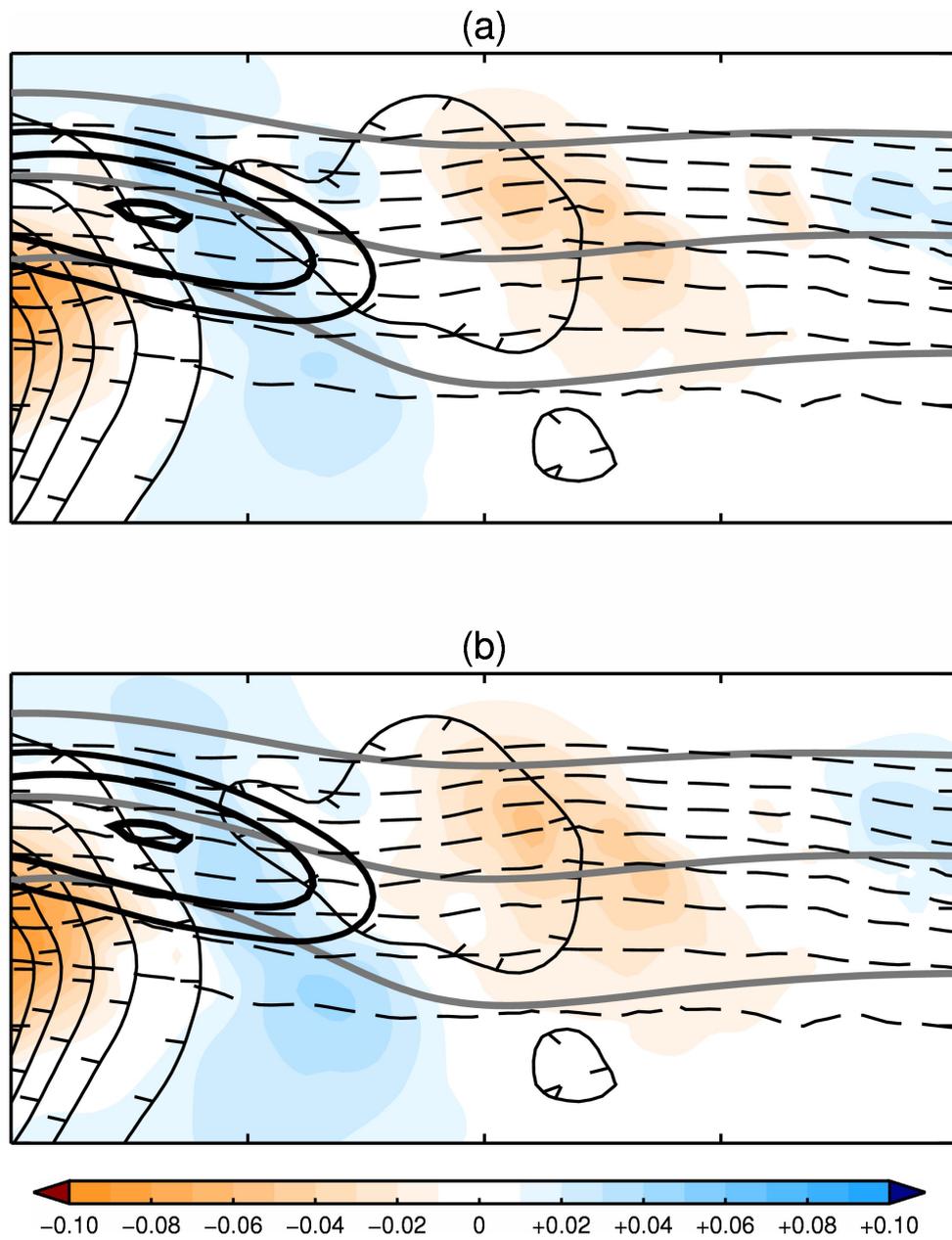


Abbildung 4.15: Vertikalbewegung ω auf verschiedenen Druckflächen bei dem Zeitpunkt $t = 144$ h. Ansonsten wie Abbildung 4.13.

(a): $p = 720$ hPa,

(b): $p = 620$ hPa.

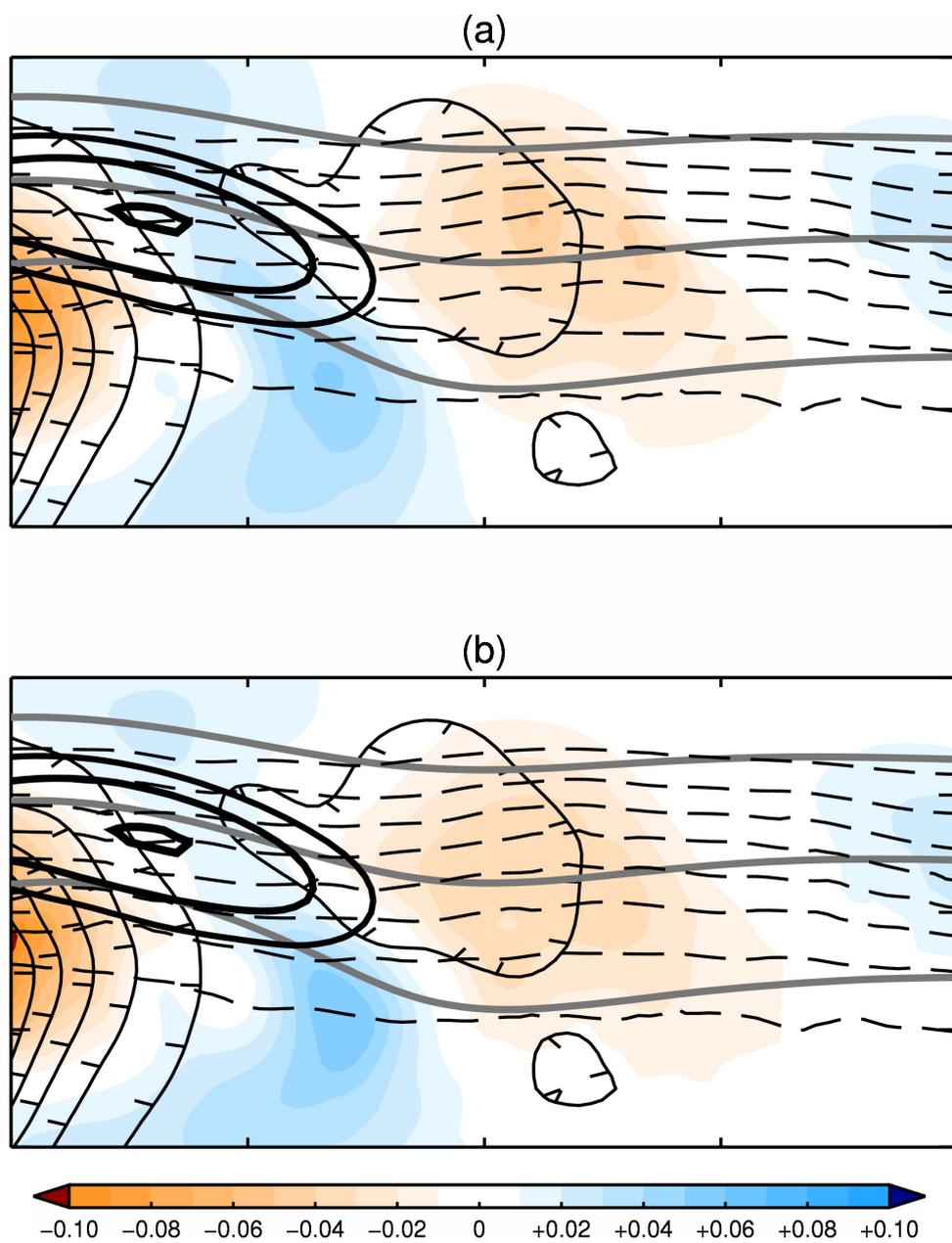


Abbildung 4.16: Wie Abbildung 4.15, aber für:

(a): $p = 520$ hPa,(b): $p = 420$ hPa.

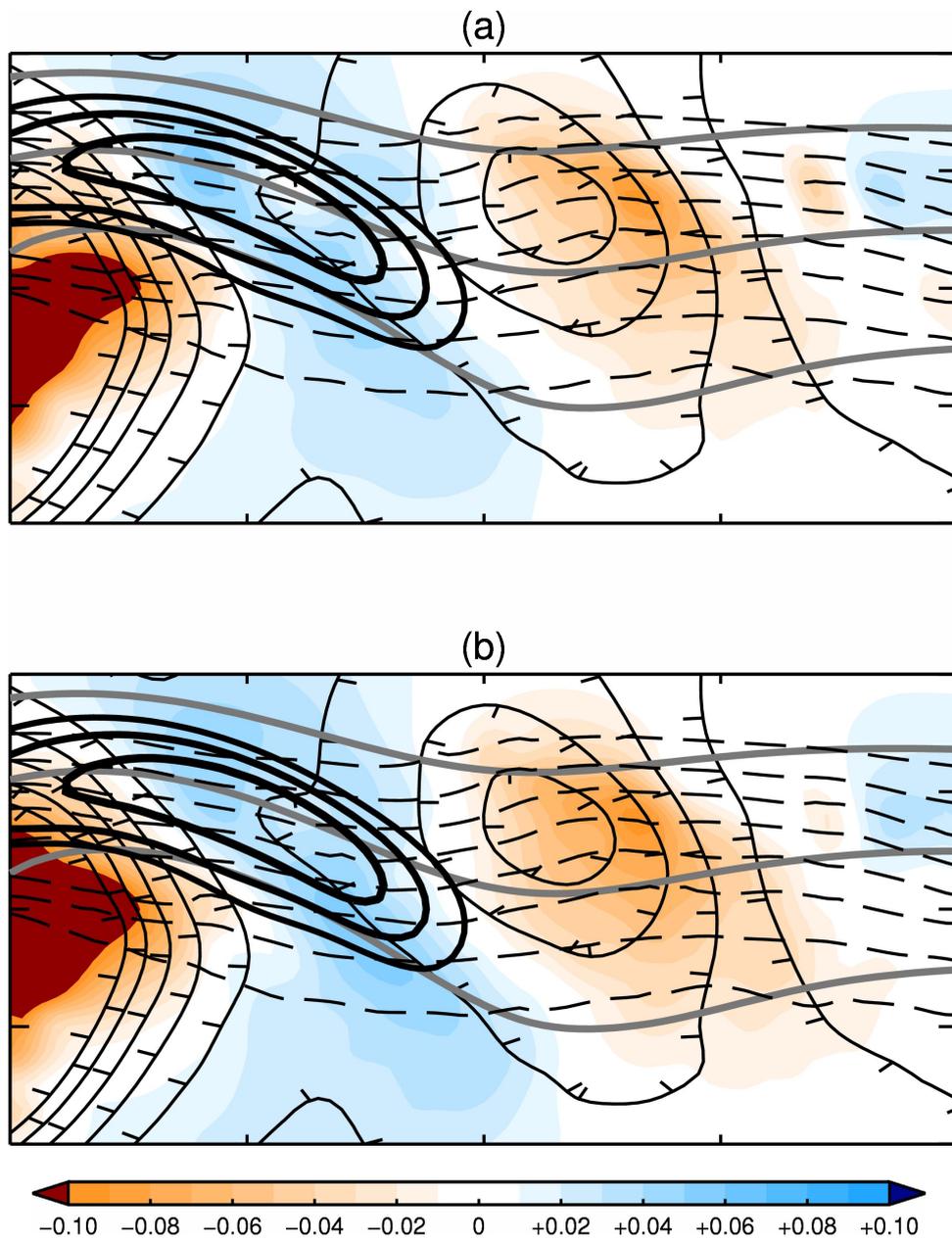


Abbildung 4.17: Vertikalbewegung ω auf verschiedenen Druckflächen bei dem Zeitpunkt $t = 156$ h. Ansonsten wie Abbildung 4.13.

(a): $p = 720$ hPa,

(b): $p = 620$ hPa.

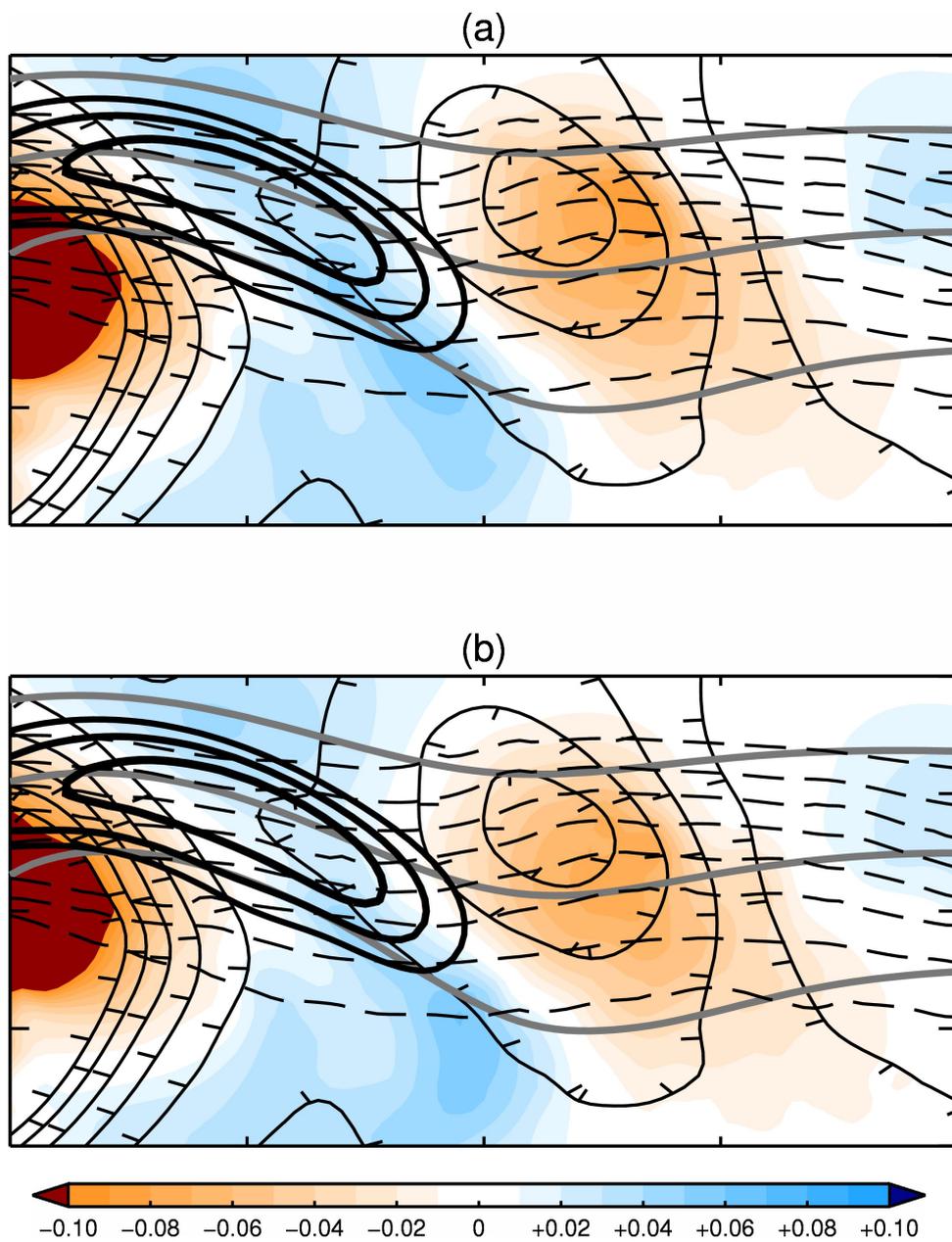


Abbildung 4.18: Wie Abbildung 4.17, aber für:

(a): $p = 520$ hPa,(b): $p = 420$ hPa.

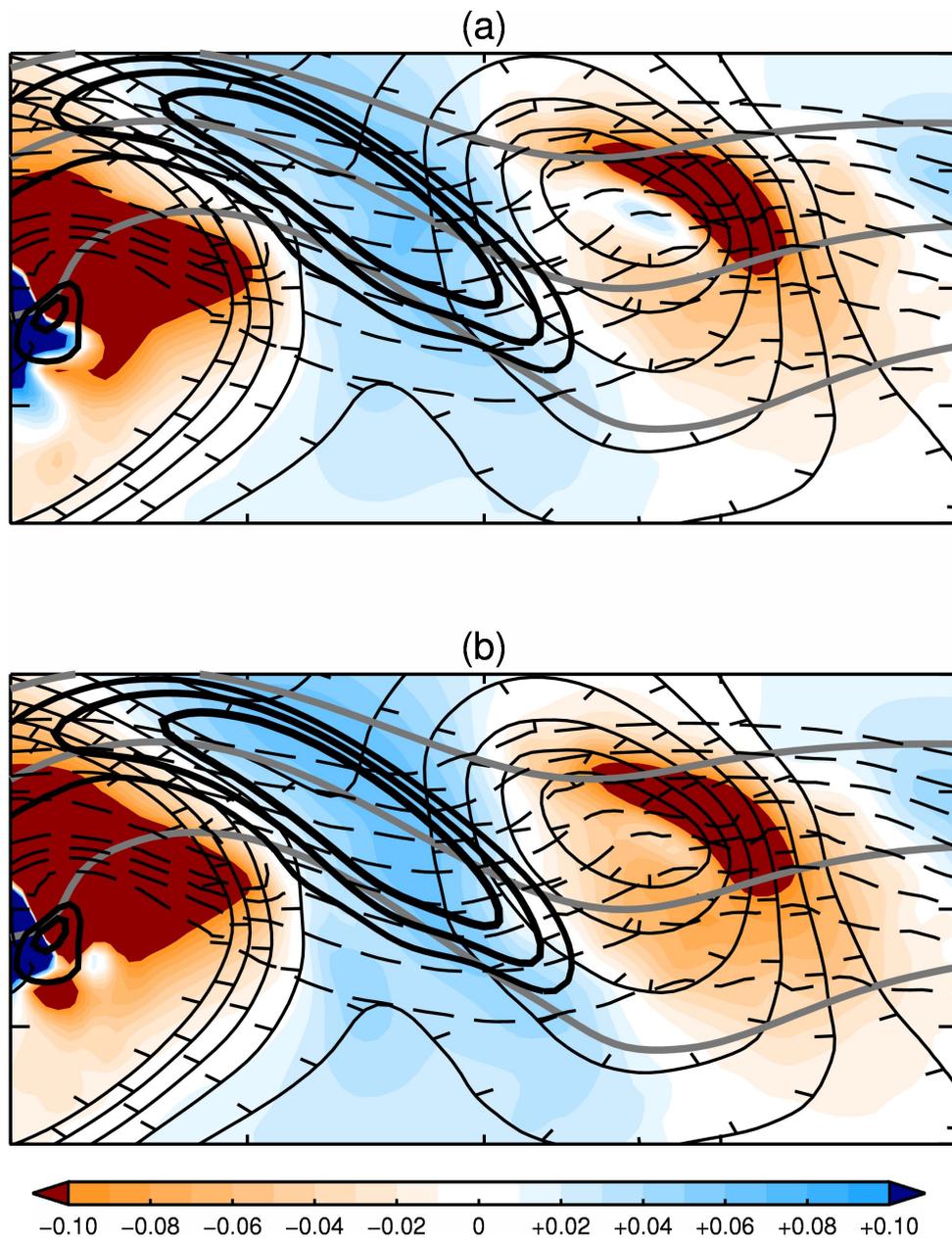


Abbildung 4.19: Vertikalbewegung ω auf verschiedenen Druckflächen bei dem Zeitpunkt $t = 168$ h. Ansonsten wie Abbildung 4.13.

(a): $p = 720$ hPa,

(b): $p = 620$ hPa.

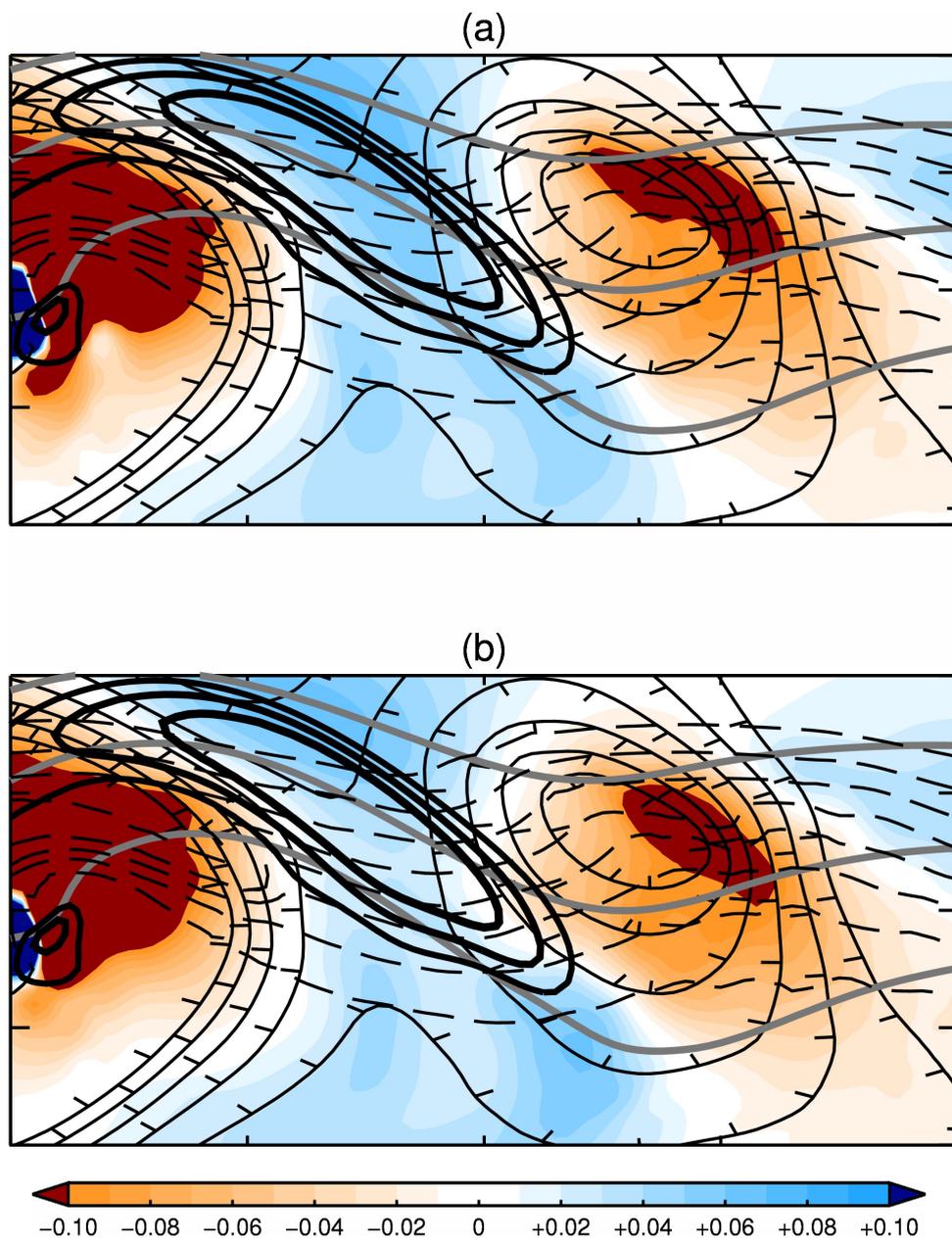


Abbildung 4.20: Wie Abbildung 4.19, aber für:

(a): $p = 520$ hPa,(b) $p = 420$ hPa.

4.5 Aus oberer Troposphäre forcierte Entwicklung

Sowohl ein Höhentrog als auch ein Jetstreak sind Merkmale der Höhenströmung. Diese Arbeit hat die Untersuchung der stromabwärts von ET induzierten Zyklogense mit Hilfe der jeweils auf eines dieser Merkmale zurückzuführenden Vertikalbewegungsanteile in der mittleren Troposphäre zum Gegenstand. Deshalb ist es sinnvoll, zu überprüfen, ob die aus dem dynamischen Antriebsterm erhaltene Vertikalbewegung ω tatsächlich im Wesentlichen aus der oberen Troposphäre forciert wird. Dazu wurde die Vertikalbewegung ω auf 520 hPa noch einmal auf spezielle Weise in zwei Anteile aufgeteilt:

Einmal in einen aus der Höhe forcierten und außerdem in den komplementären aus der unteren Troposphäre forcierten Anteil. Erwartungsgemäß wird die Vertikalbewegung in der mittleren Troposphäre viel stärker aus der oberen Troposphäre ($p < 670$ hPa) als aus der unteren Troposphäre ($p > 620$ hPa) forciert. Dies sieht man gut anhand der Abbildungen 4.21 bis 4.24, welche jeweils den aus der oberen bzw. aus der unteren Troposphäre forcierten Anteil an der Vertikalbewegung ω während der Entstehungsphase (Abbildung 4.21 und Abbildung 4.22) und während der Intensivierungsphase (Abbildung 4.23 und Abbildung 4.24) der stromabwärts von ET induzierten Zyklone auf 520 hPa zeigen. Dafür wurde jeweils der dynamische Antriebsterm $F = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}$ auf den Druckflächen mit $p > 620$ hPa bzw. auf den Druckflächen mit $p < 670$ hPa auf Null gesetzt.

Im Folgenden wird weiterhin in Bezug auf die Druckflächen mit $p > 620$ hPa von der unteren Troposphäre und entsprechend in Bezug auf die Druckflächen mit $p < 670$ hPa von der oberen Troposphäre gesprochen.

In der Entstehungsphase des stromabwärts von ET induzierten Tiefs ist das gesamte in den Abbildungen 4.21 und 4.22 sichtbare Aufsteigen aus der oberen Troposphäre forciert.

Auch in der Intensivierungsphase ist der mit Abstand größte Teil des Aufsteigens im Bereich des sich weiter intensivierenden Tiefs aus der oberen Troposphäre forciert. Lediglich im Bereich der Warmfront des Tiefs zeigt sich auch ein leichtes aus der unteren Troposphäre forciertes Aufsteigen. Interessant dabei ist, dass auch die Warmfront sich im Wesentlichen in dem aus der oberen Troposphäre forcierten Aufsteigen zeigt. Das legt die Vermutung nahe, dass die trogvorderseitige Warmluftadvektion in der unteren Troposphäre bei der hier betrachteten Zyklogense eine eher untergeordnete Rolle spielt.

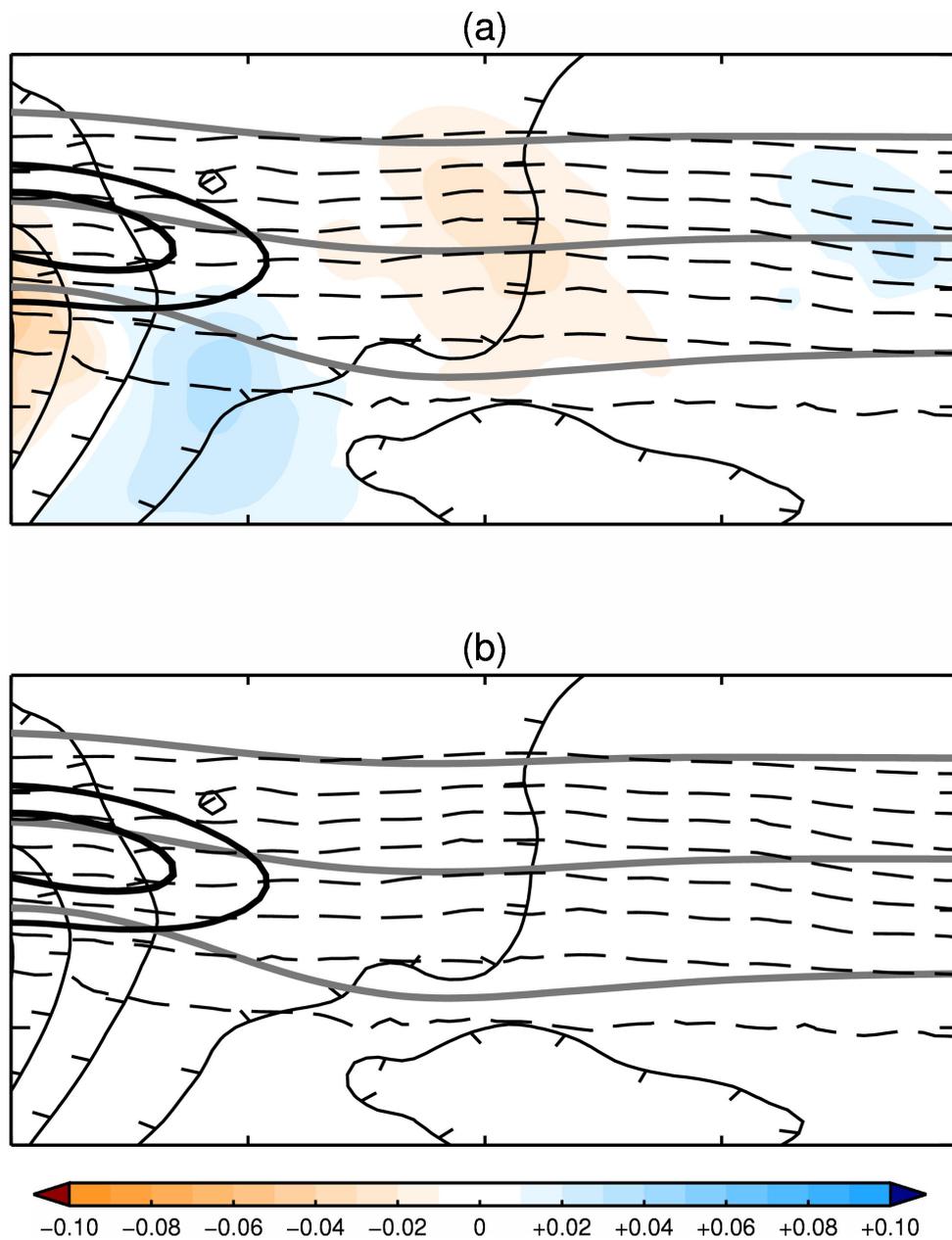
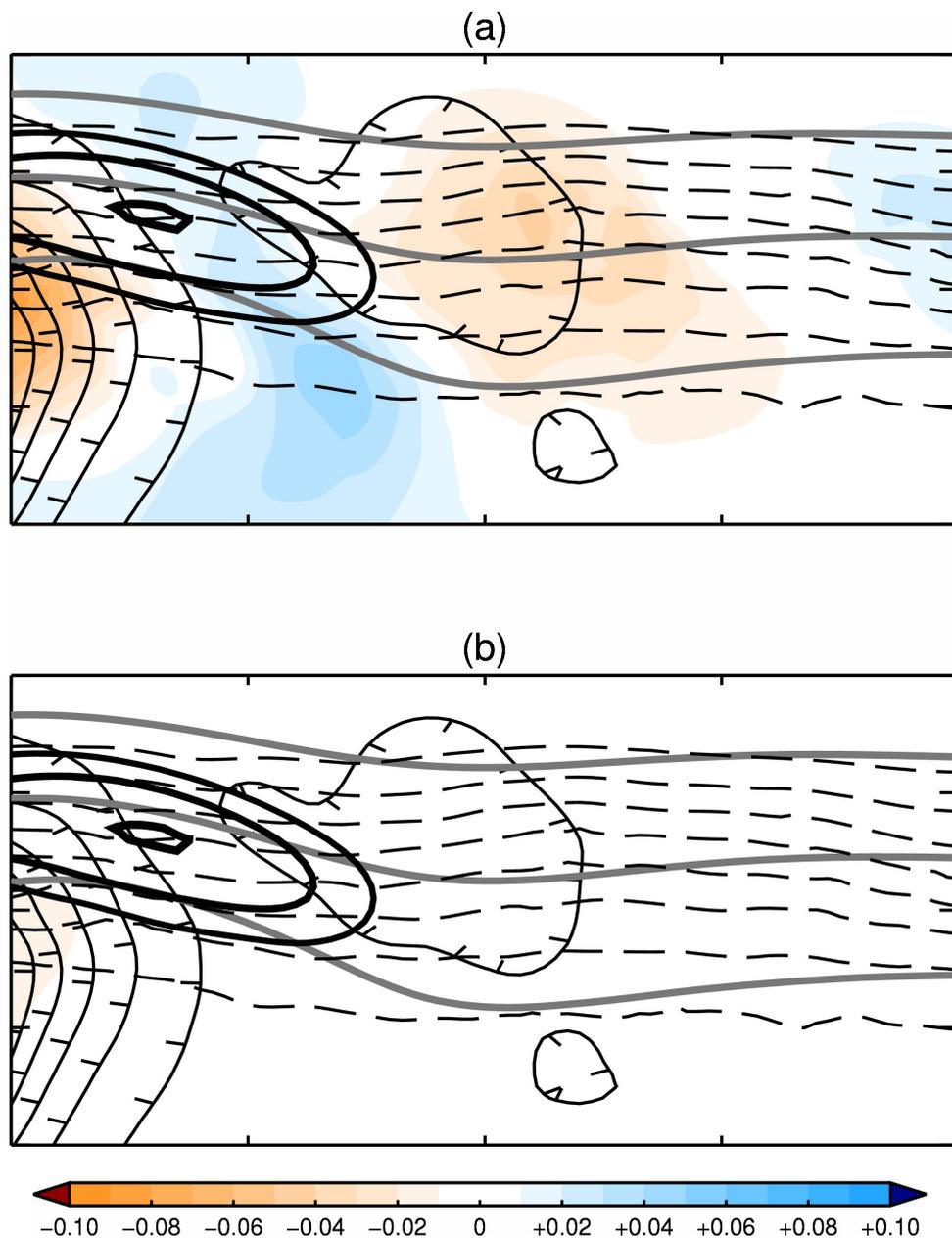


Abbildung 4.21: $t = 132$ h

(a): Aus oberer Troposphäre forcierte Vertikalbewegung ω (mit $F = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}$ für $p > 620$ hPa auf Null gesetzt).

(b): Aus unterer Troposphäre forcierte Vertikalbewegung ω (mit $F = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}$ für $p < 670$ hPa auf Null gesetzt).

Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

Abbildung 4.22: $t = 144$ h.

(a): Aus oberer Troposphäre forcierte Vertikalbewegung ω (mit $F = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}$ für $p > 620$ hPa auf Null gesetzt).

(b): Aus unterer Troposphäre forcierte Vertikalbewegung ω (mit $F = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}$ für $p < 670$ hPa auf Null gesetzt).

Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

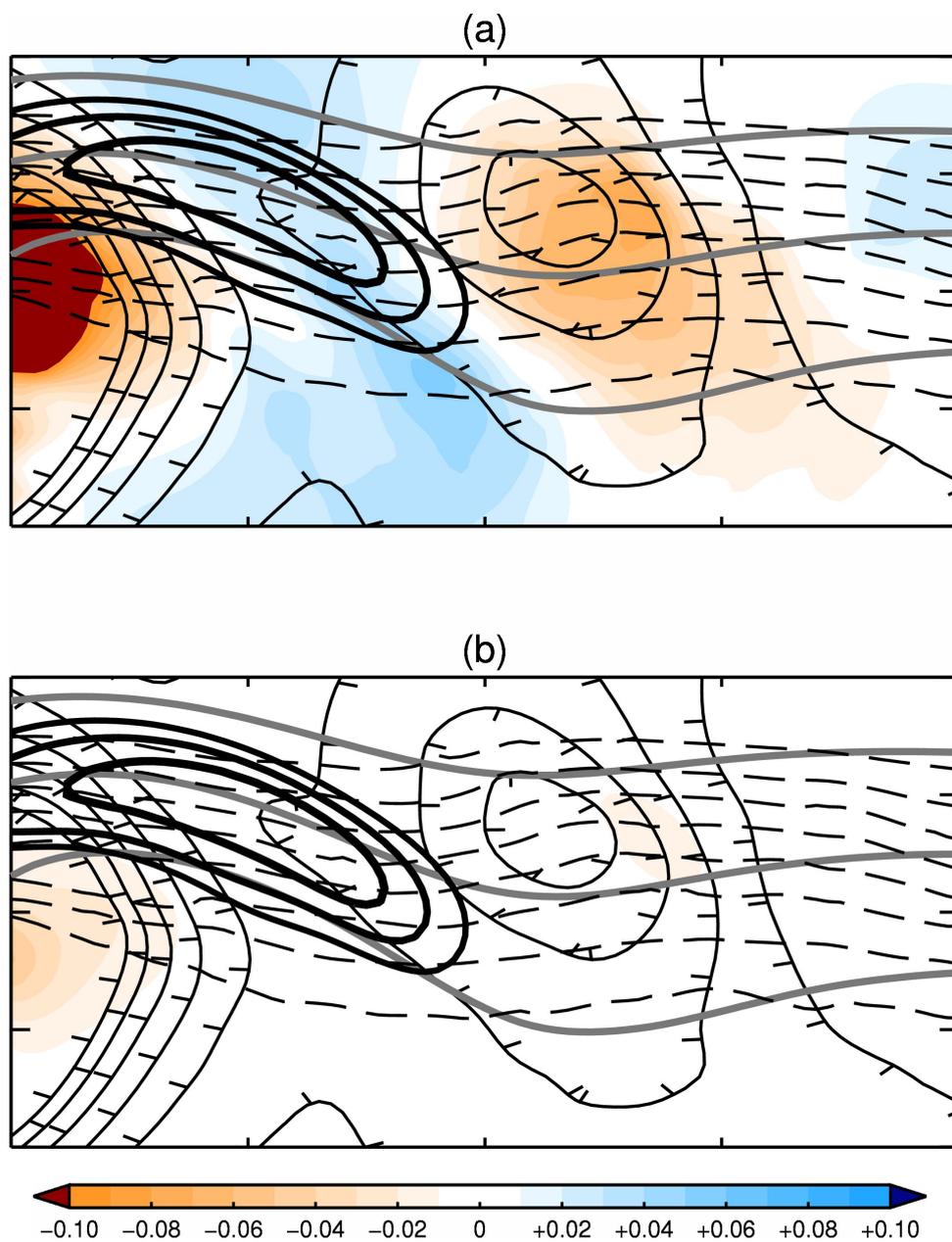
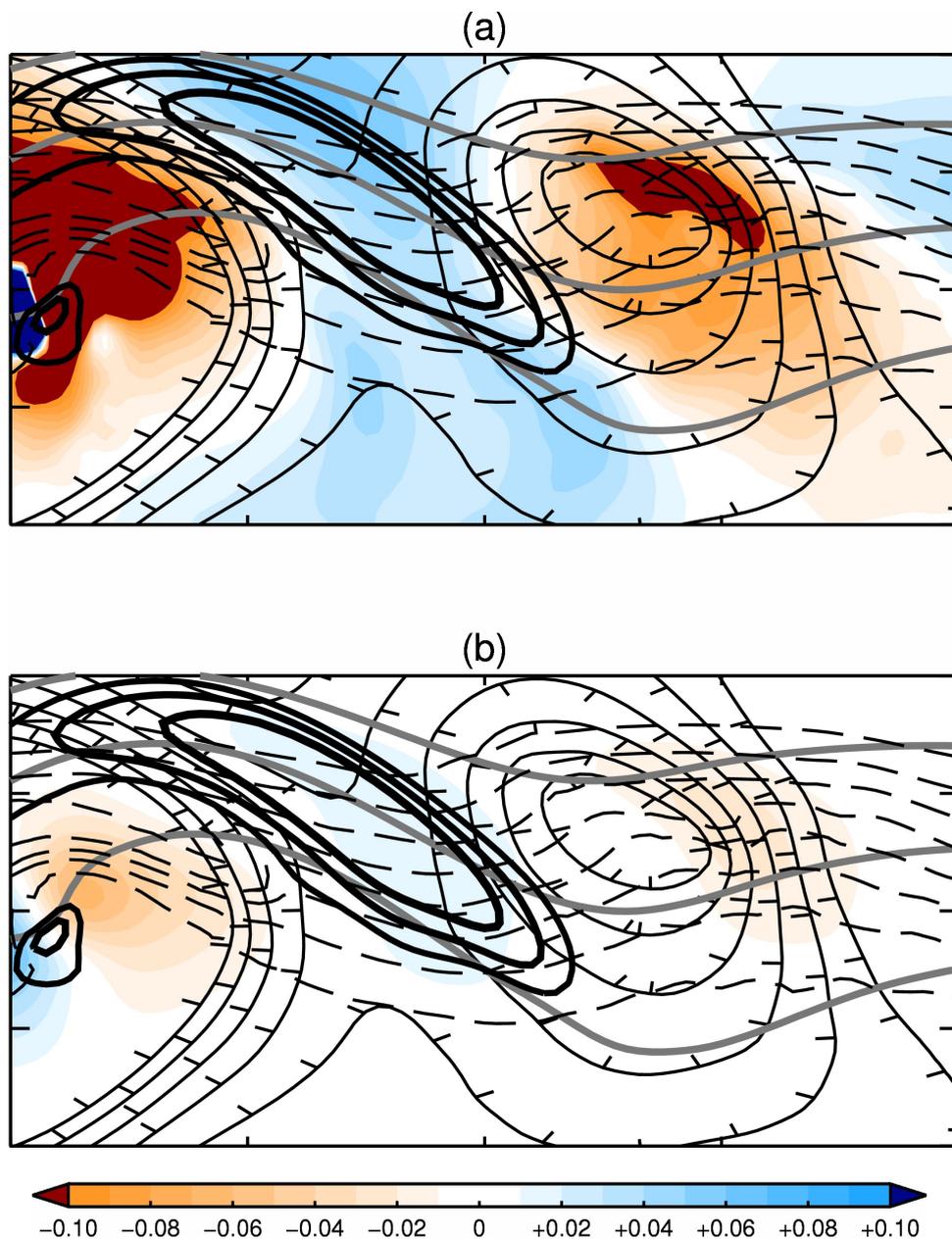


Abbildung 4.23: $t = 156$ h.

(a): Aus oberer Troposphäre forcierte Vertikalbewegung ω (mit $F = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}$ für $p > 620$ hPa auf Null gesetzt).

(b): Aus unterer Troposphäre forcierte Vertikalbewegung ω (mit $F = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}$ für $p < 670$ hPa auf Null gesetzt).

Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

Abbildung 4.24: $t = 168$ h.

(a): Aus oberer Troposphäre forcierte Vertikalbewegung ω (mit $F = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}$ für $p > 620$ hPa auf Null gesetzt).

(b): Aus unterer Troposphäre forcierte Vertikalbewegung ω (mit $F = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}$ für $p < 670$ hPa auf Null gesetzt).

Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

4.6 Die partitionierte Vertikalbewegung

In diesem Abschnitt werden nun die Ergebnisse der aus der Q-Vektor-Aufteilung nach *Jusem & Atlas* (1998) erhaltenen Komponenten der Vertikalbewegung ω_{st} , ω_{curv} und ω_{shdv} besprochen. Dabei wird versucht, die Frage nach der Rolle von Jetstreak und Höhentrog bei der stromabwärts von ET induzierten Zyklogese mit Hilfe dieser Komponenten zu analysieren. Dies wird zuerst durch den Vergleich der einzelnen Komponenten der Vertikalbewegung und danach durch die Betrachtung der jeweiligen Verhältnisse der Einzelkomponenten zur Vertikalbewegung $\omega = \omega_{st} + \omega_{curv} + \omega_{shdv}$ besprochen.

Die Abbildungen 4.25 bis 4.32 zeigen für Entstehungs- und Intensivierungsphase der stromabwärts von ET entstehenden Zyklone auf den links stehenden geraden Seiten jeweils die Gesamtvertikalbewegung ω und die Komponente ω_{st} . Auf den rechts stehenden ungeraden Seiten sind jeweils die Komponenten ω_{curv} und ω_{shdv} gezeigt.

4.6.1 Entstehungsphase

Bei $t = 132$ Stunden sieht man in der Gesamtvertikalbewegung ω (Abbildung 4.25(a)) über dem stromabwärts von ET entstehenden Tiefdruckgebiet bereits deutlich eine ausgedehnte Region mit Aufsteigen. Den größten Anteil daran hat die Komponente ω_{curv} (Abbildung 4.26(a)) mit Minimalwerten von etwa $-0,02 \text{ Pa s}^{-1}$. Die anderen beiden Komponenten tragen mit Werten von jeweils ungefähr $-0,005 \text{ Pa s}^{-1}$ nur relativ wenig zu diesem Aufsteigen bei. In ω_{st} (Abbildung 4.25(b)) erkennt man, mit dem Modell der 4 Jetstreak-Quadranten konform, eine Region mit Aufsteigen im linken Ausgangsbereich des Jetstreaks. Die Komponente ω_{shdv} (Abbildung 4.26(b)) ist durch maximales Aufsteigen im Bereich des Jetstreaks gekennzeichnet, welches sich auch recht deutlich auf das Muster von ω im Bereich des Jetstreaks auswirkt.

Bei $t = 144$ Stunden sind die Verhältnisse sehr ähnlich wie bei dem Zeitpunkt 12 Stunden zuvor. Im bodennahen Geopotential zeigen sich nun aber schon geschlossene Konturen und das stärkste Aufsteigen in der mittleren Troposphäre liegt etwas östlich davon. Auch hier hat die Komponente ω_{curv} (Abbildung 4.28(a)) mit dortigen Minimalwerten von weniger als $-0,03 \text{ Pa s}^{-1}$ den größten Anteil an diesem Aufsteigen. Die Komponente ω_{st} (Abbildung 4.27(b)) zeigt mit Minimalwerten von etwa $-0,02 \text{ Pa s}^{-1}$ leichtes Aufsteigen auf der Rückseite des Tiefdruckgebietes, welches – so wie auch das Aufsteigen in ω_{shdv} (Abbildung 4.28(b)) in der Ausgangsregion des Jetstreaks – von dem starken Absinken ω_{curv} aber weitgehend kompensiert wird. Im Bereich des Aufsteigens östlich des Kerns der induzierten Zyklone, zeigt ω_{st} Werte von etwa $-0,01 \text{ Pa s}^{-1}$. Auch bei diesem Zeitpunkt fällt auf, dass die Komponente ω_{shdv} im Bereich des Jetstreaks mit Minimalwerten von etwa $-0,05 \text{ Pa s}^{-1}$ starkes Aufsteigen zeigt. Dieses Aufsteigen in ω_{shdv} reicht bis in die Region östlich des Kerns der induzierten Zyklone, wo es Werte – wie dort auch ω_{st} – von etwa $-0,01 \text{ Pa s}^{-1}$ aufweist.

4.6.2 Intensivierungsphase

Bei $t = 156$ Stunden hat sich das induzierte Tiefdruckgebiet bereits deutlich intensiviert. Wieder ist das Aufsteigen auf seiner Vorderseite stark von der Komponente ω_{curv} (Abbildung 4.30(a)) mit Minimalwerten von etwa $-0,06 \text{ Pa s}^{-1}$ dominiert. Einen geringen Anteil an diesem Aufsteigen hat aber auch die Komponente ω_{st} (Abbildung 4.29(b)) mit dortigen Werten zwischen $-0,02 \text{ Pa s}^{-1}$ und $-0,01 \text{ Pa s}^{-1}$ in der man nun sehr gut die beiden Quadranten in Ausgangsregion des Jetstreaks (Aufsteigen in der linken und Absinken in der rechten Ausgangsregion) erkennen kann. Die beiden Quadranten am Jetstreak-Eingang sind ebenfalls zu erkennen, aber sehr wahrscheinlich durch ET-bedingte Effekte überlagert. Erneut sieht man in der Komponente ω_{shdv} (Abbildung 4.30(b)) im Bereich des Jetstreaks Aufsteigen, welches etwas südlich der Jetstreak-Achse mit Minimalwerten von dort etwa $-0,06 \text{ Pa s}^{-1}$ am stärksten ausgeprägt ist und sich vorderseitig der induzierten Zyklone immer noch mit Werten von etwa $-0,01 \text{ Pa s}^{-1}$ zeigt.

Bei $t = 168$ Stunden wird erneut das Aufsteigen im Bereich des sich weiter intensivierenden Tiefdruckgebietes von der Komponente ω_{curv} (Abbildung 4.32(a)) klar dominiert. Die dortigen Minimalwerte ω_{curv} unterschreiten mit etwa $-0,1 \text{ Pa s}^{-1}$ deutlich die dortigen Minimalwerte von ω_{st} (etwa $-0,03 \text{ Pa s}^{-1}$) und ω_{shdv} (etwa $-0,02 \text{ Pa s}^{-1}$). Bei der Komponente ω_{st} (Abbildung 4.31(b)) sind wieder gut die beiden Quadranten in der Ausgangsregion des Jetstreaks zu erkennen. Das Aufsteigen im Bereich des Jetstreaks in der Komponente ω_{shdv} ist nun noch etwas deutlicher südlich der Jetstreak-Achse auszumachen und weist dort Minimalwerte von bis unter $-0,1 \text{ Pa s}^{-1}$ auf. Zusätzlich kann man zum einen erkennen, dass sich das Aufsteigen im Bereich der Warmfront des induzierten Tiefs auch als lokales Maximum des Aufsteigens in der Komponente ω_{st} zeigt. Zum anderen kann man aber auch erkennen, dass dieses mit der Warmfront in Zusammenhang zu bringende Aufsteigen hauptsächlich in der Komponente ω_{curv} enthalten ist.

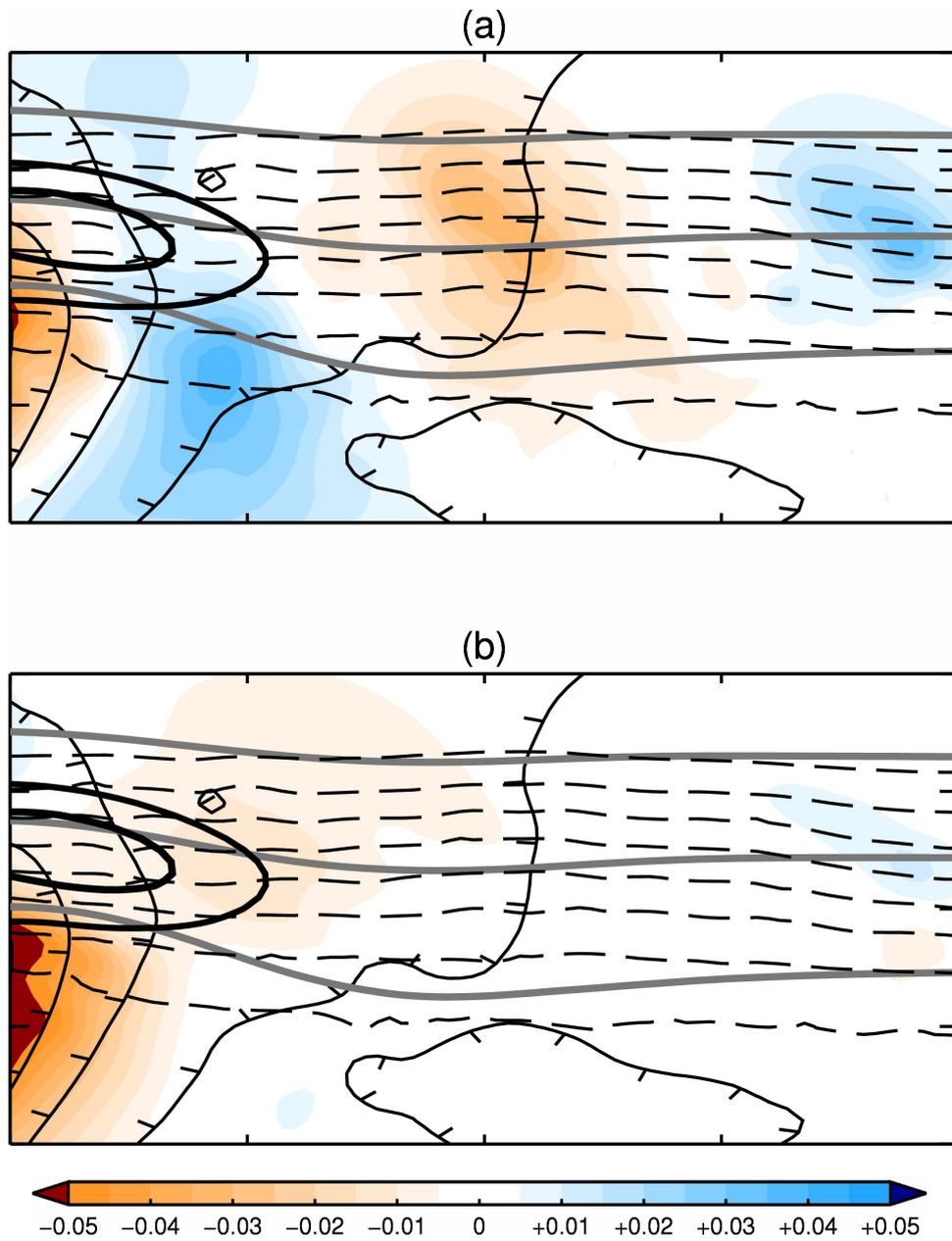


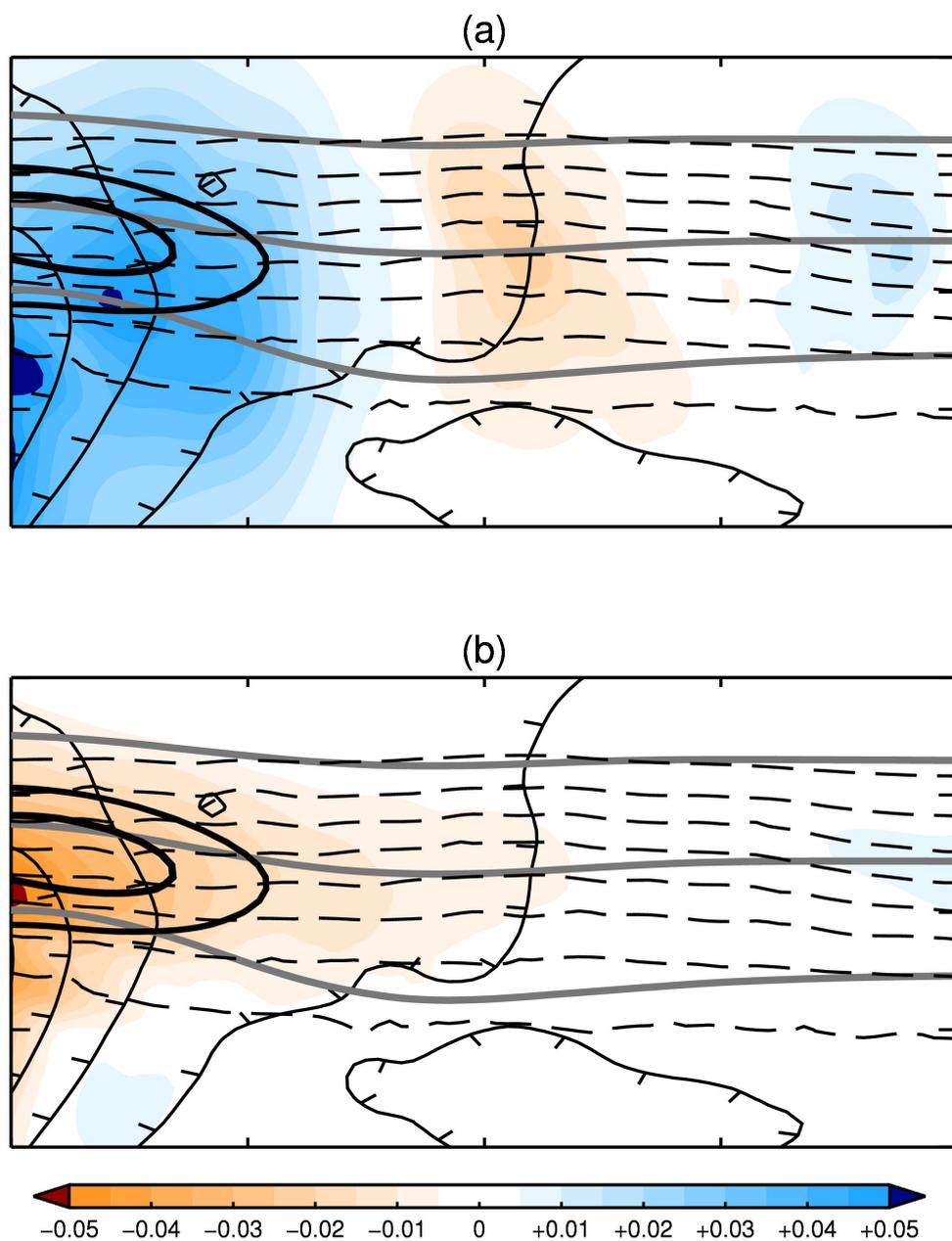
Abbildung 4.25: $t = 132$ h.

(a): Vertikalbewegung ω .

(b): Komponente ω_{st} der Vertikalbewegung.

ZU BEACHTEN: Die Farbskala läuft hier von $-0,05 \text{ Pas}^{-1}$ bis $+0,05 \text{ Pas}^{-1}$.

Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

Abbildung 4.26: $t = 132$ h.(a): Vertikalbewegung ω_{curv} .(b): Komponente ω_{shdv} der Vertikalbewegung.

Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

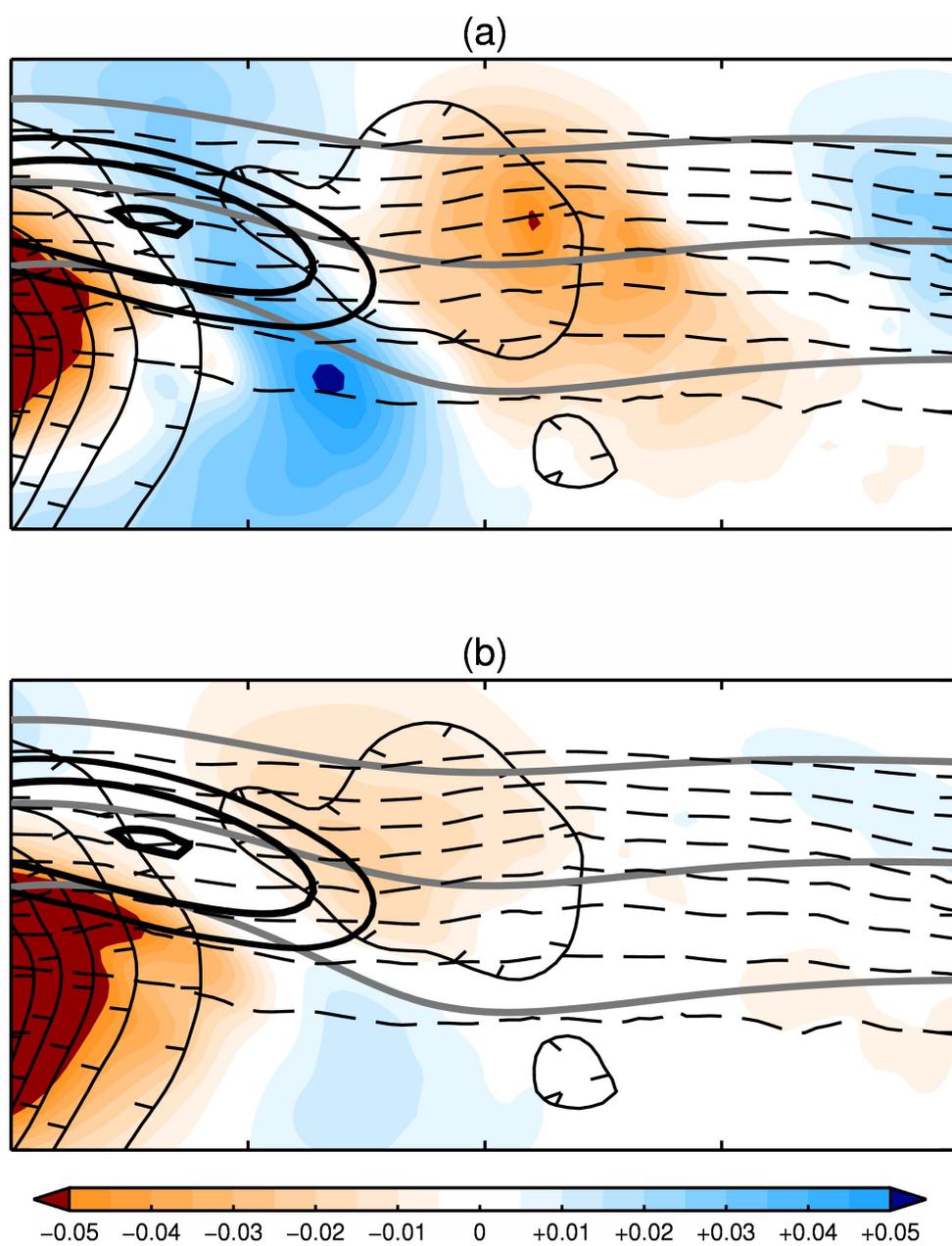
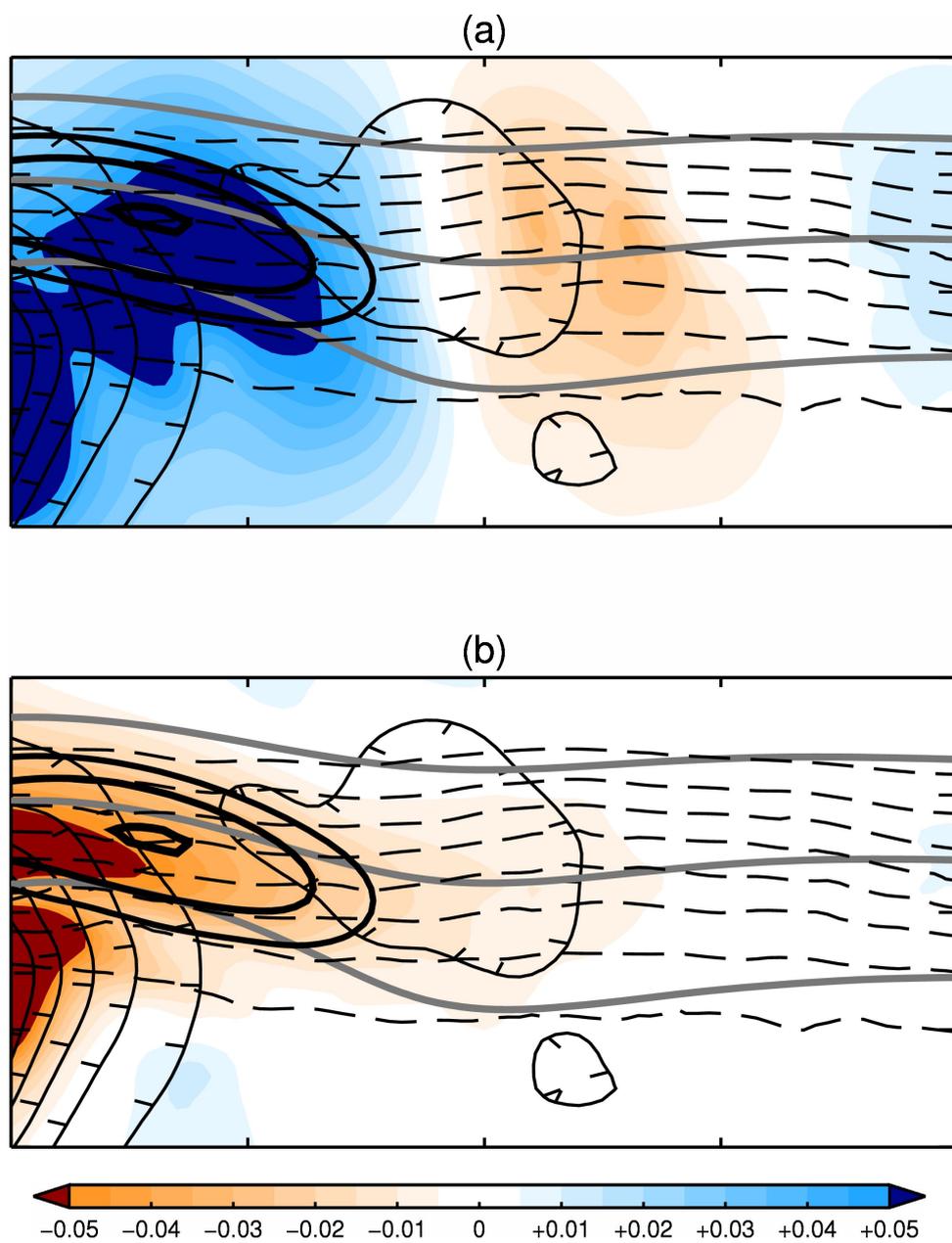


Abbildung 4.27: $t = 144$ h.

(a): Vertikalbewegung ω .

(b): Komponente ω_{st} der Vertikalbewegung.

Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

Abbildung 4.28: $t = 144$ h.(a): Vertikalbewegung ω_{curv} (b): Komponente ω_{shdv} der Vertikalbewegung.

Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

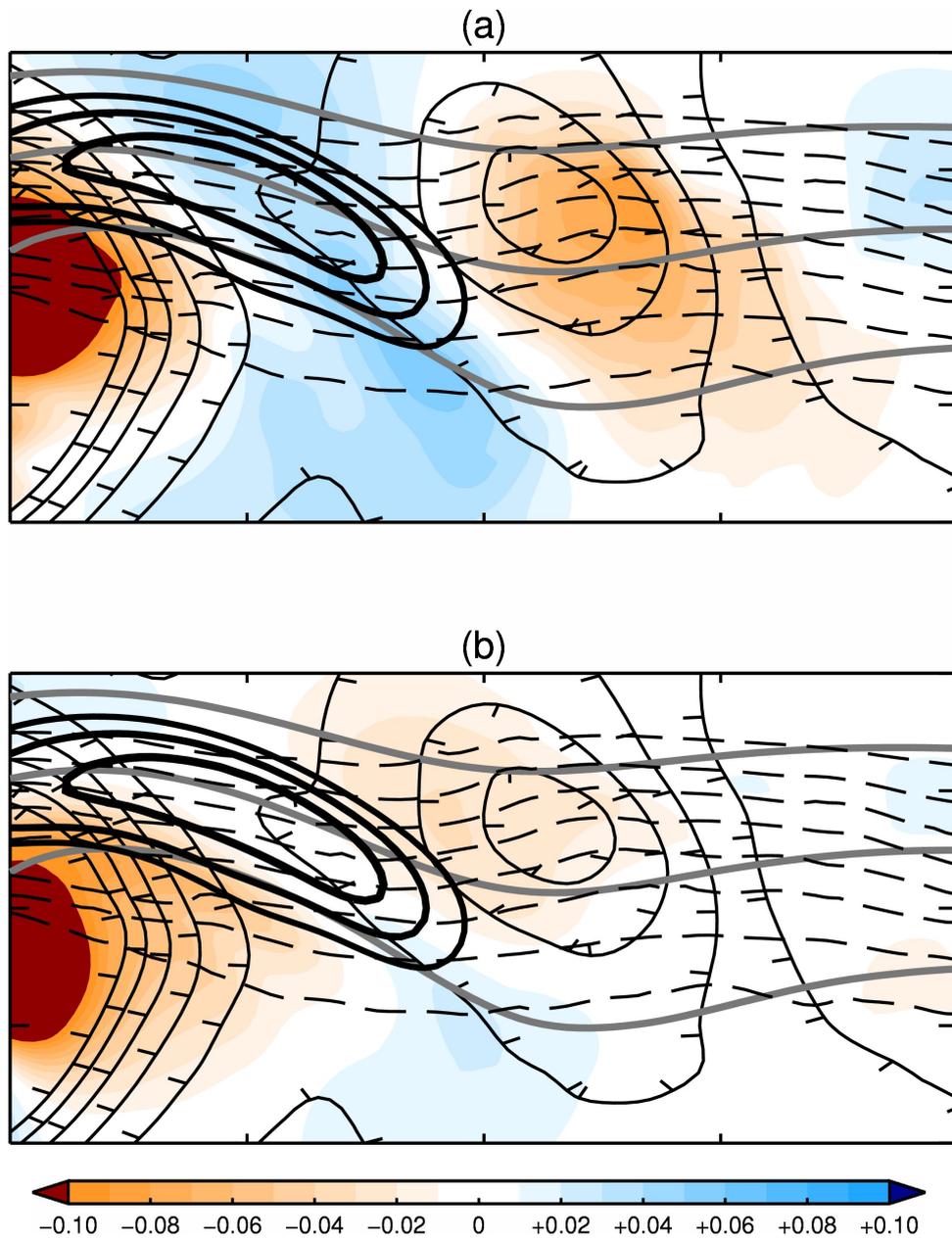


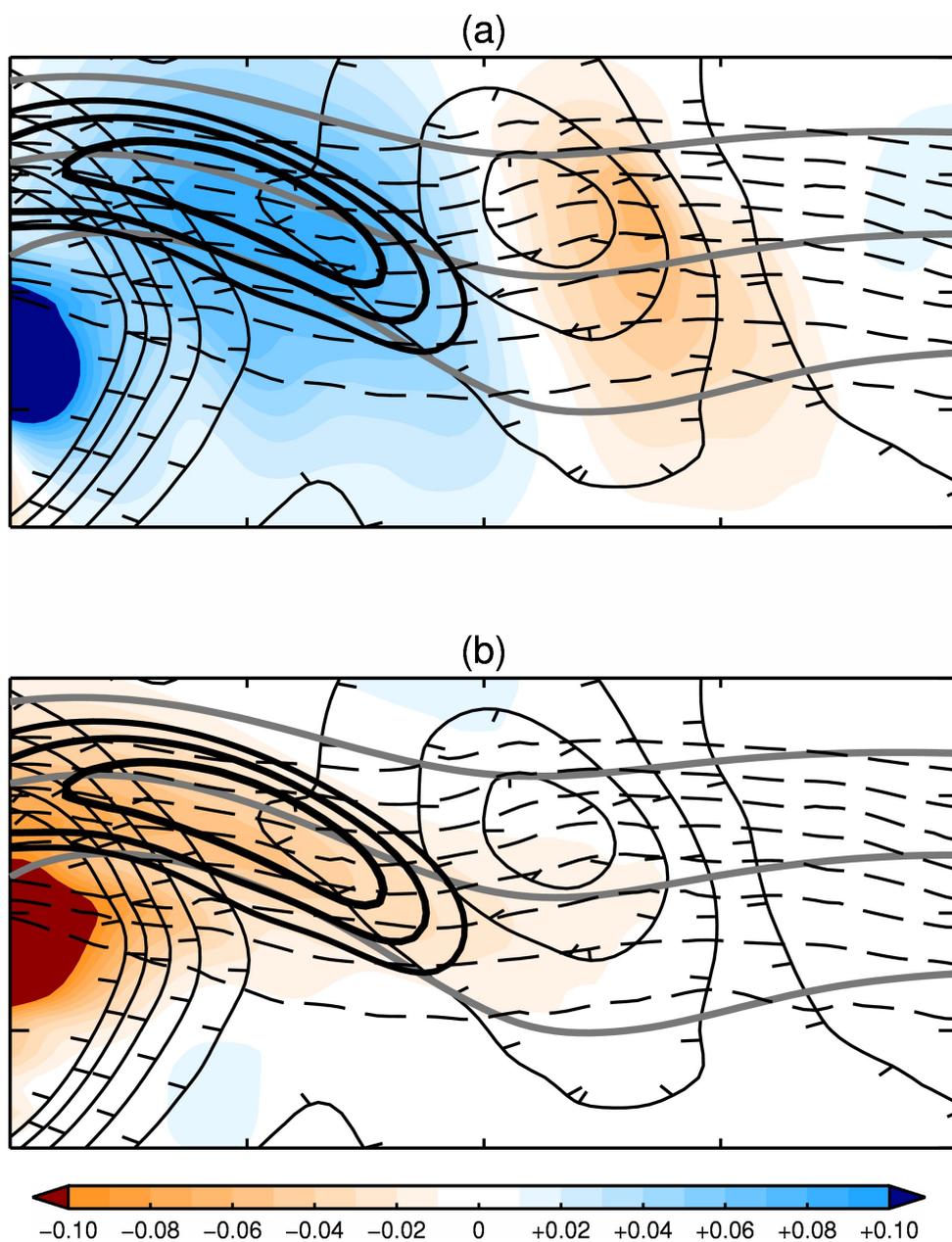
Abbildung 4.29: $t = 156$ h.

(a): Vertikalbewegung ω .

(b): Komponente ω_{st} der Vertikalbewegung.

ZU BEACHTEN: Die Farbskala läuft wieder von $-0,1 \text{ Pas}^{-1}$ bis $+0,1 \text{ Pas}^{-1}$.

Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

Abbildung 4.30: $t = 156$ h.(a): Vertikalbewegung ω_{curv} .(b): Komponente ω_{shdv} der Vertikalbewegung.

Ansonsten wie bei Abbildung 4.29.

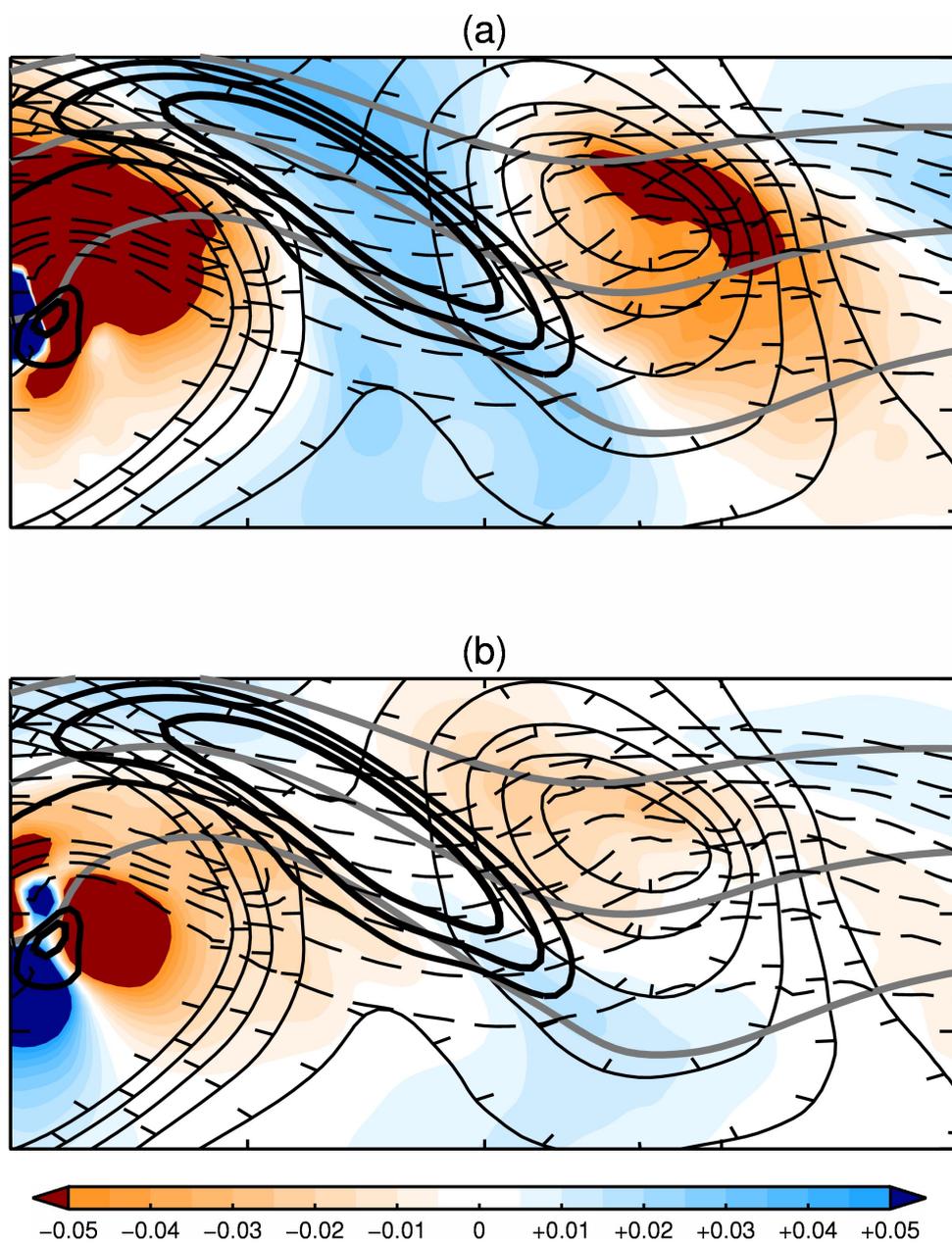


Abbildung 4.31: $t = 168$ h.

(a): Vertikalbewegung ω .

(b): Komponente ω_{st} der Vertikalbewegung.

Ansonsten wie bei Abbildung 4.29.

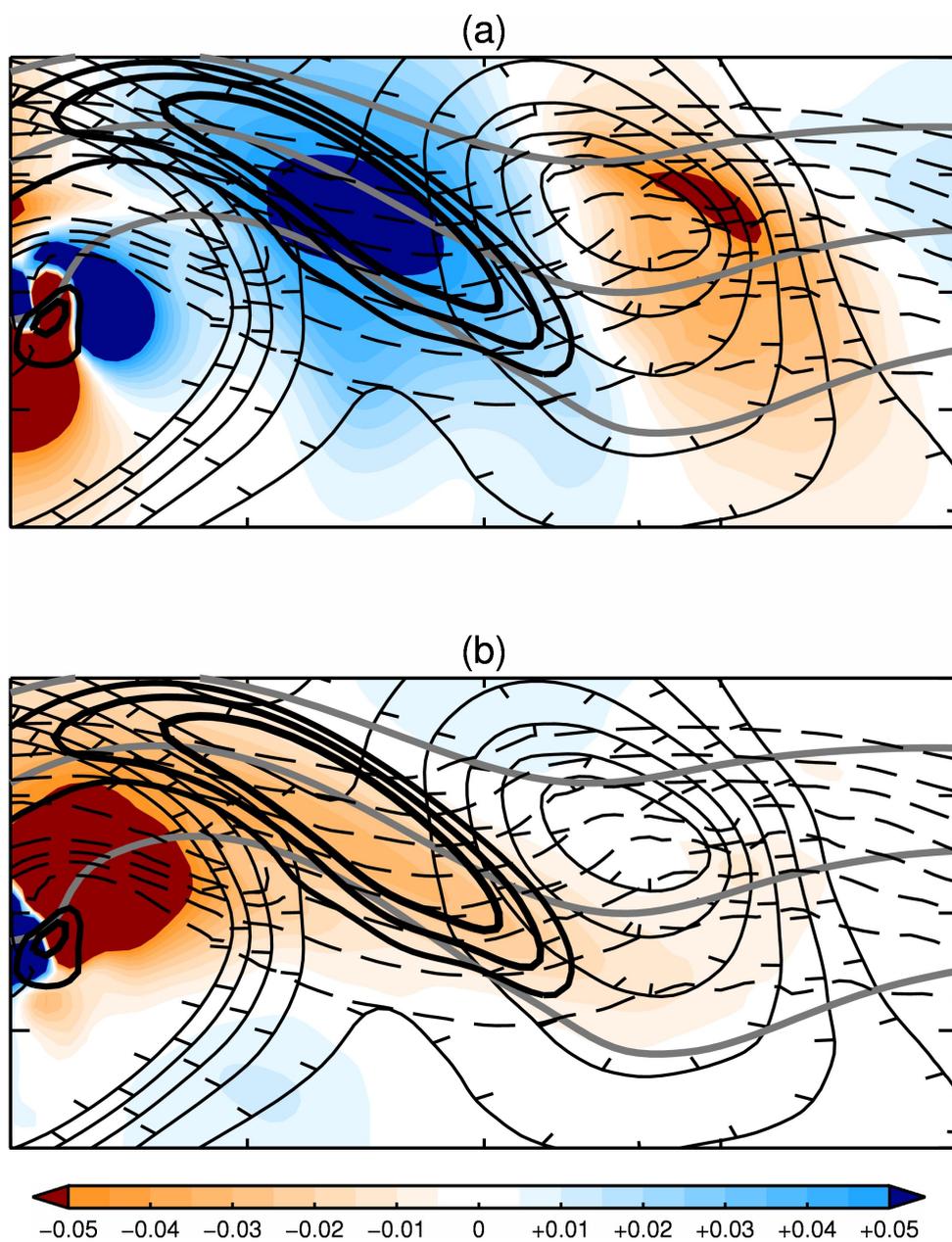


Abbildung 4.32: $t = 168$ h.

(a): Vertikalbewegung ω_{curv} .

(b): Komponente ω_{shdv} der Vertikalbewegung.

Ansonsten wie bei Abbildung 4.29.

4.6.2.1 Auftreten des Shapiro-Effekts

Das bei jedem der vier betrachteten Zeitpunkte im Bereich des Jetstreaks gefundene Aufsteigen in ω_{shdv} muss eindeutig in Zusammenhang mit Warmluftadvektion durch den Jetstreak stehen. Dies kann man sich anhand der Formel für den partitionierten Q-Vektor \mathbf{Q}_{shdv} (Gleichung (2.20)) plausibel machen. Diese lautet:

$$\mathbf{Q}_{shdv} = -\mathbf{n} \frac{\partial s_g}{\partial n} \frac{\partial \alpha}{\partial s}. \quad (4.1)$$

Im Bereich des Jetstreaks gilt, aufgrund der dort starken horizontalen Windscherung, nördlich der Jet-Achse $\frac{\partial s_g}{\partial n} \ll 0$ und südlich der Jet-Achse $\frac{\partial s_g}{\partial n} \gg 0$. Bei Warmluftadvektion durch den Jetstreak gilt in dessen Bereich $\frac{\partial \alpha}{\partial s} < 0$, da dann am Jet-Eingang die Luft wärmer ist als am Jet-Ausgang. Im Fall von Warmluftadvektion durch den Jetstreak zeigt \mathbf{Q}_{shdv} also nördlich und südlich der Jet-Achse jeweils in Richtung des Jets. Das Feld von \mathbf{Q}_{shdv} ist dort dann also konvergent, wodurch dort $\omega_{shdv} < 0$ gelten muss. Insofern kann das signifikante Aufsteigen in ω_{shdv} nur durch Warmluftadvektion bedingt sein. Dem zufolge läge hier, der in Abschnitt definierten 2.4 Art der Bezeichnung folgend, ein negativer Shapiro-Effekt vor. Dass im Bereich des Jetstreaks tatsächlich Warmluftadvektion vorherrscht, zeigen die Abbildungen 4.33 und 4.34, welche die Warmluftadvektion durch den nichtdivergenten Anteil des Windes auf Höhe des Jetstreaks während der Entstehungs- und Intensivierungsphase zeigen.

Wie im Abschnitt 2.4 anhand der Gleichung (2.7) erläutert wurde, wird Vertikalbewegung, die sich aufgrund von Temperaturadvektion aus dem dynamischen Antriebsterm ergibt, durch lokale Extrema in der Temperaturadvektion hervorgerufen. Ein lokales Maximum der Warmluftadvektion begünstigt nach Gleichung (2.7) Aufsteigen. Das steht im Einklang mit der obigen Argumentation.

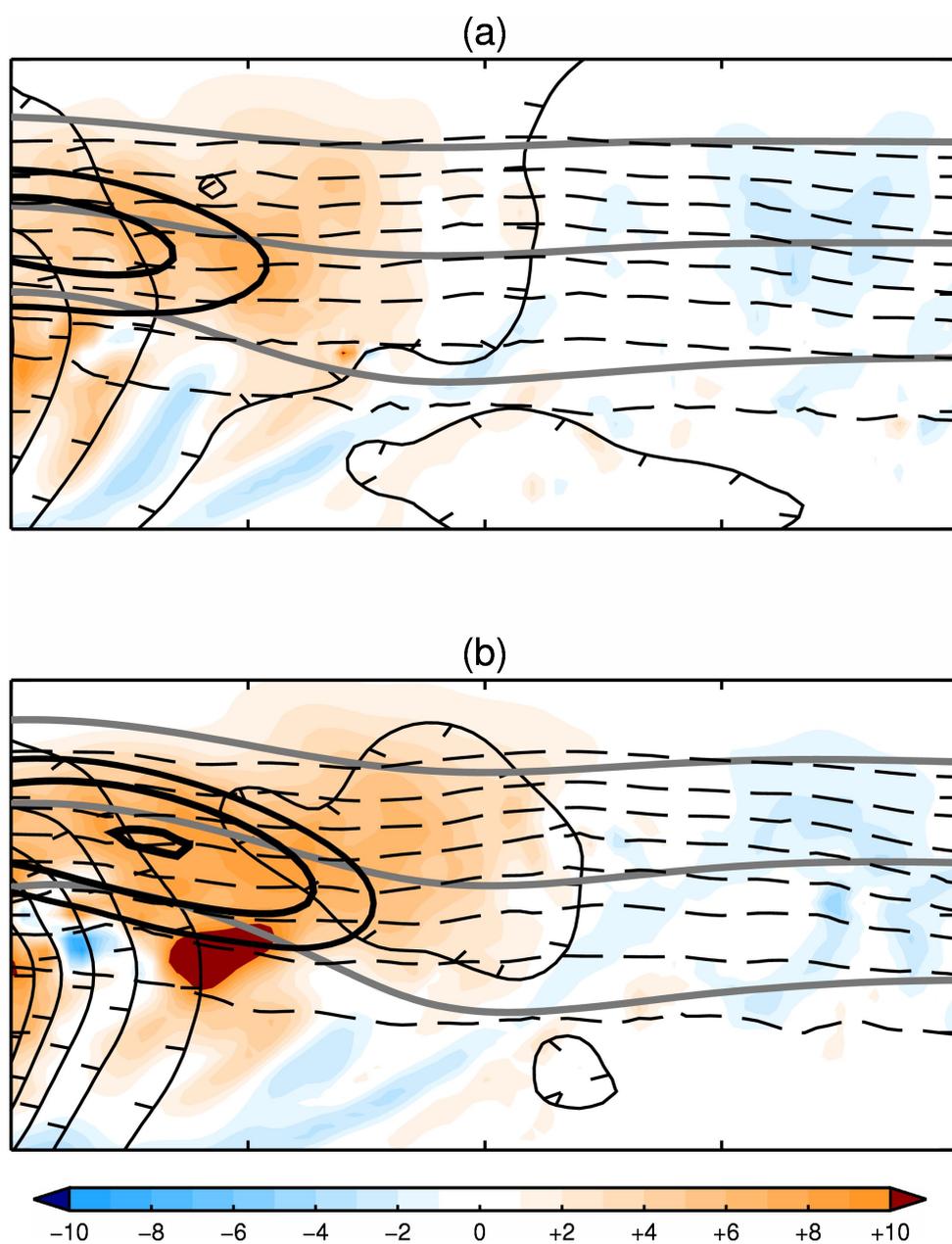


Abbildung 4.33: Temperaturadvektion auf 220 hPa (Farben, in 10^{-5} K s^{-1}).

(a): $t = 132$ h,

(b): $t = 144$ h.

Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

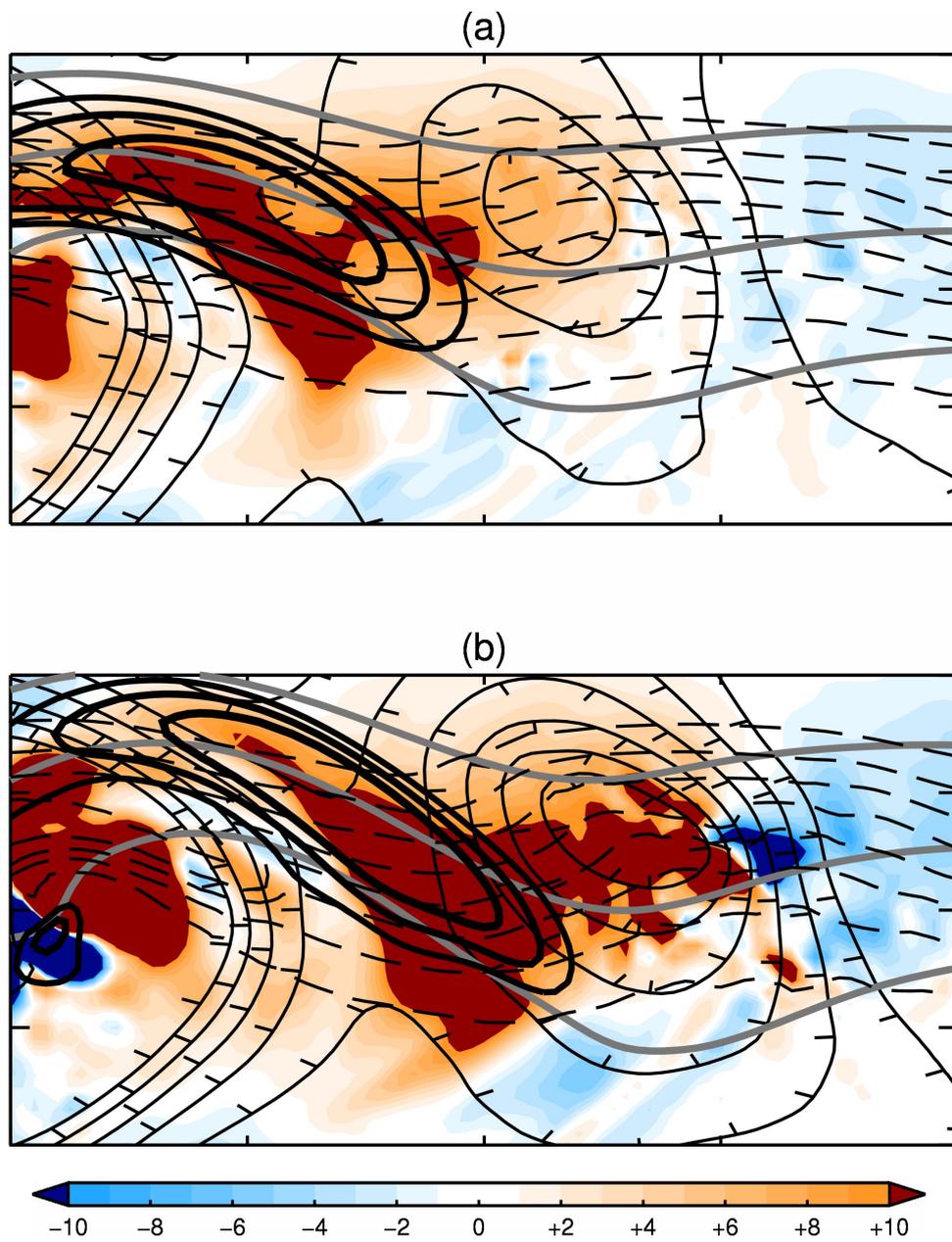


Abbildung 4.34: Wie Abbildung 4.33, aber bei:

(a): $t = 156$ h,

(b): $t = 168$ h.

Schon an dieser Stelle lässt sich festhalten, dass die Komponente ω_{curv} an dem zur stromabwärts des ET-Systems stattfindenden Zyklongenese führenden Aufsteigen offensichtlich den größten Anteil hat. Die beiden Quadranten in der Ausgangsregion des Jetstreaks lassen sich in ω_{st} zwar erkennen, jedoch ist das Aufsteigen durch den Einfluss der Diffluenz des Jetstreaks in seiner linken Ausgangsregion deutlich schwächer, als das auf den Höhentrog zurückführbare Aufsteigen in ω_{curv} in dieser Region. Dieser Unterschied ist sowohl in der Entstehungs- als auch in der Intensivierungsphase gerade dort sehr deutlich, wo man die stärkste Intensivierung der induzierten Zyklone erwartet, nämlich etwas östlich ihres Kerns. Auch die Komponente ω_{shdv} trägt im Bereich der sich intensivierenden Zyklone teilweise etwas zu dem dortigen Aufsteigen bei, jedoch sind auch hier die Werte deutlich schwächer als bei der Komponente ω_{curv} . Aufgrund der gezeigten Auswirkung der Warmluftadvektion im Jetstreak, ist offensichtlich auch bei ω_{shdv} der Jetstreak die maßgebliche Ursache für das in dieser Komponente im Bereich der sich intensivierenden Zyklone sichtbare Aufsteigen. Daher werden hier bei der Bewertung des Einflusses von Jetstreak und Höhentrog auf die stromabwärts von ET induzierte Zyklongenese die Komponenten ω_{st} und ω_{shdv} beide dem Jetstreak zugerechnet.

Die Tabelle 4.1 zeigt noch einmal zusammengefasst die ungefähren Werte maximalen Aufsteigens auf 520 hPa für die 4 betrachteten Zeitpunkte im Bereich der sich entwickelnden stromabwärts von ET induzierten Zyklone aufgeteilt in ω_{curv} und $\omega_{st} + \omega_{shdv}$. Die dritte Spalte der Tabelle gibt, für den jeweiligen Zeitpunkt, das daraus abgeschätzte Verhältnis des Beitrags des Höhentrogs zu dem des Jetstreaks zur stromabwärts von ET induzierten Zyklongenese.

Zeitpunkt	ω_{curv} [Pa s ⁻¹]	$\omega_{st} + \omega_{shdv}$ [Pa s ⁻¹]	$\frac{\text{Beitrag Höhentrog}}{\text{Beitrag Jetsreak}}$
132 h	-0,02	-0,01	2 zu 1
144 h	-0,03	-0,02	3 zu 2
156 h	-0,06	-0,03	2 zu 1
168 h	-0,1	-0,05	2 zu 1

Tabelle 4.1: Ungefähre Werte des maximalen Aufsteigens in ω_{curv} und in $\omega_{st} + \omega_{shdv}$ im Bereich der sich entwickelnden stromabwärts von ET induzierten Zyklone sowie daraus abgeleiteter ungefähre Schätzwert für das Verhältnis des Beitrags des Höhentrogs zu dem des Jetstreaks zur stromabwärts von ET induzierten Zyklongenese.

Die erste Einschätzung, basierend auf den Werten in Tabelle 4.1 ist, dass der Höhentrog mit etwa 60 bis 70 Prozent der auf ihn zurückzuführenden Vertikalbewegung (ω_{curv}) im Bereich der Zyklongenese die deutlich größere Rolle für diese spielt als der Jetstreak, auf den nur etwa 30 bis 40 Prozent dieser Vertikalbewegung zurückzuführen sind (ω_{st} und ω_{shdv}).

4.7 Untersuchung des Anteils der Komponenten

Um die beiden Beiträge zur hier betrachteten Zyklognese, von Höhentrog einerseits und Jetstreak andererseits, besser miteinander vergleichen zu können, werden nun die Verhältnisse ω_{curv}/ω und $(\omega_{st} + \omega_{shdv})/\omega$ betrachtet. Mit Hilfe von, nach bestimmten Kriterien erhaltenen, arithmetischen Mittelwerten dieser Verhältnisse werden schließlich die Beiträge von Höhentrog und Jetstreak abgeschätzt.

4.7.1 Graphische Auswertung

Die Abbildungen 4.35 bis 4.42 zeigen abwechselnd einerseits die Komponente ω_{curv} sowie die Summe aus den beiden Komponenten ω_{st} und ω_{shdv} (auf den Seiten mit gerader Seitenzahl, links) und andererseits die Verhältnisse $\Omega_{HT} \equiv \frac{\omega_{curv}}{\omega}$ und $\Omega_{JS} \equiv \frac{\omega_{st} + \omega_{shdv}}{\omega}$ (auf den Seiten mit ungerader Seitenzahl, rechts), jeweils auf 520 hPa. Letztere wurden für die Darstellung nur an Gitterpunkten mit $\omega < -0,005 \text{ Pas}^{-1}$ ermittelt und ansonsten auf Null gesetzt. Die Indizes *HT* und *JS* stehen dabei für Höhentrog und Jetstreak. Wie zuvor bereits begründet, wurde die Komponente ω_{curv} also wieder dem Höhentrog und die beiden Komponenten ω_{st} und ω_{shdv} wurden jeweils dem Jetstreak zugeordnet. Die 4 hellgrauen Quadrate in den die Verhältnisse zeigenden Abbildungen 4.36, 4.38, 4.40 und 4.42 markieren die Bereiche über die gemittelt wurde, wobei allerdings Gitterpunkte mit $\omega \geq -0,005 \text{ Pas}^{-1}$ bei der Mittelung nicht berücksichtigt wurden. Ihr Zentrum liegt jeweils an dem Gitterpunkt P_z mit dem maximalen Aufsteigen im Bereich des sich entwickelnden stromabwärts von ET induzierten Tiefs.

Wie man gut erkennen kann, gibt es bei jedem betrachteten Zeitpunkt im Bereich des stromabwärts von ET induzierten Tiefs einen Wechsel bei der Dominanz der Anteile. In einem gewissen Bereich westlich von P_z dominiert Ω_{JS} bei jedem Zeitpunkt mit Werten von deutlich über 50 %. Genau umgekehrt ist es allerdings in der Umgebung von P_z und östlich davon, wo Ω_{HT} mit Werten von deutlich über 50 % klar dominiert. Diesen Wechsel kann man gut verstehen, indem man zusätzlich die Abbildungen mit den Werten für die Komponente ω_{curv} sowie für die Summe aus den beiden Komponenten ω_{st} und ω_{shdv} (auf den Seiten mit gerader Seitenzahl, links) betrachtet. Man erkennt, dass der Wechsel in der Dominanz eng mit dem Vorzeichenwechsel von ω_{curv} an der Achse des Höhentrogs zusammenhängt. Westlich dieser Achse ist die Komponente ω_{curv} noch positiv und das Aufsteigen demnach zu über 100 % durch ω_{st} und ω_{shdv} bzw. durch das Aufsteigen im linken Ausgangsbereich des Jetstreaks sowie durch das mit dem durch ihn verursachte relative Maximum der Warmluftadvektion in Zusammenhang stehende Aufsteigen zu erklären. Östlich der Trogachse sind die beiden letztgenannten Effekte nur noch schwach oder gar nicht mehr ausgeprägt. Dafür ist dort nun die Komponente ω_{curv} negativ, womit das Aufsteigen dort deutlich von ihr dominiert wird.

Wie man also sieht, wird bei jedem betrachteten Zeitpunkt im Bereich des stärksten Aufsteigens das Aufsteigen sehr deutlich von der Komponente ω_{curv} dominiert. Das steht im Einklang mit der im vorigen Abschnitt angegebenen ersten Einschätzung.

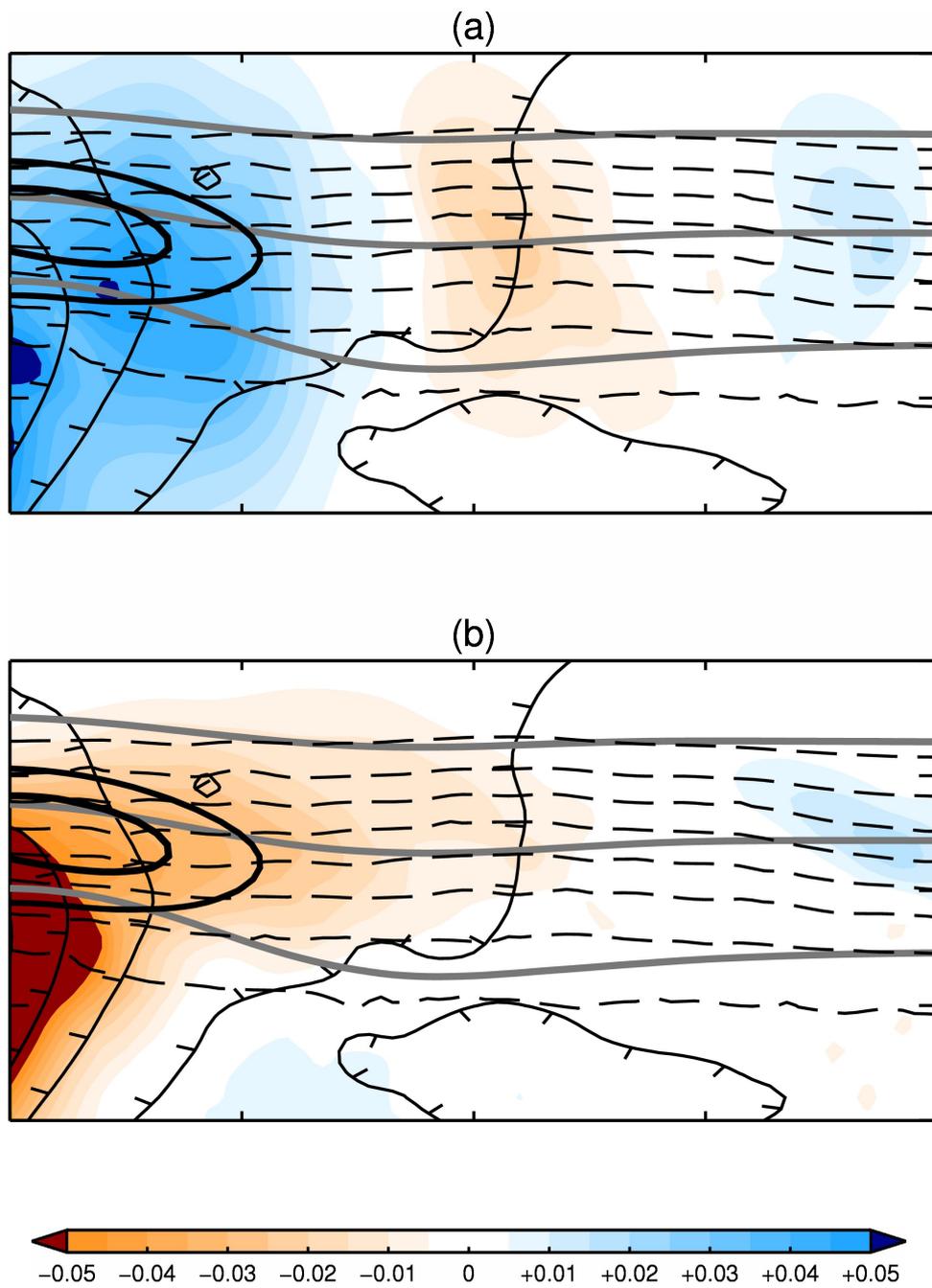


Abbildung 4.35: $t = 132$ h.

(a): Komponente der Vertikalbewegung ω_{curv} .

(b): Summe der beiden anderen Komponenten der Vertikalbewegung $\omega_{st} + \omega_{shdv}$.

ZU BEACHTEN: Die Farbskala läuft von $-0,05 \text{ Pa s}^{-1}$ bis $+0,05 \text{ Pa s}^{-1}$.

Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

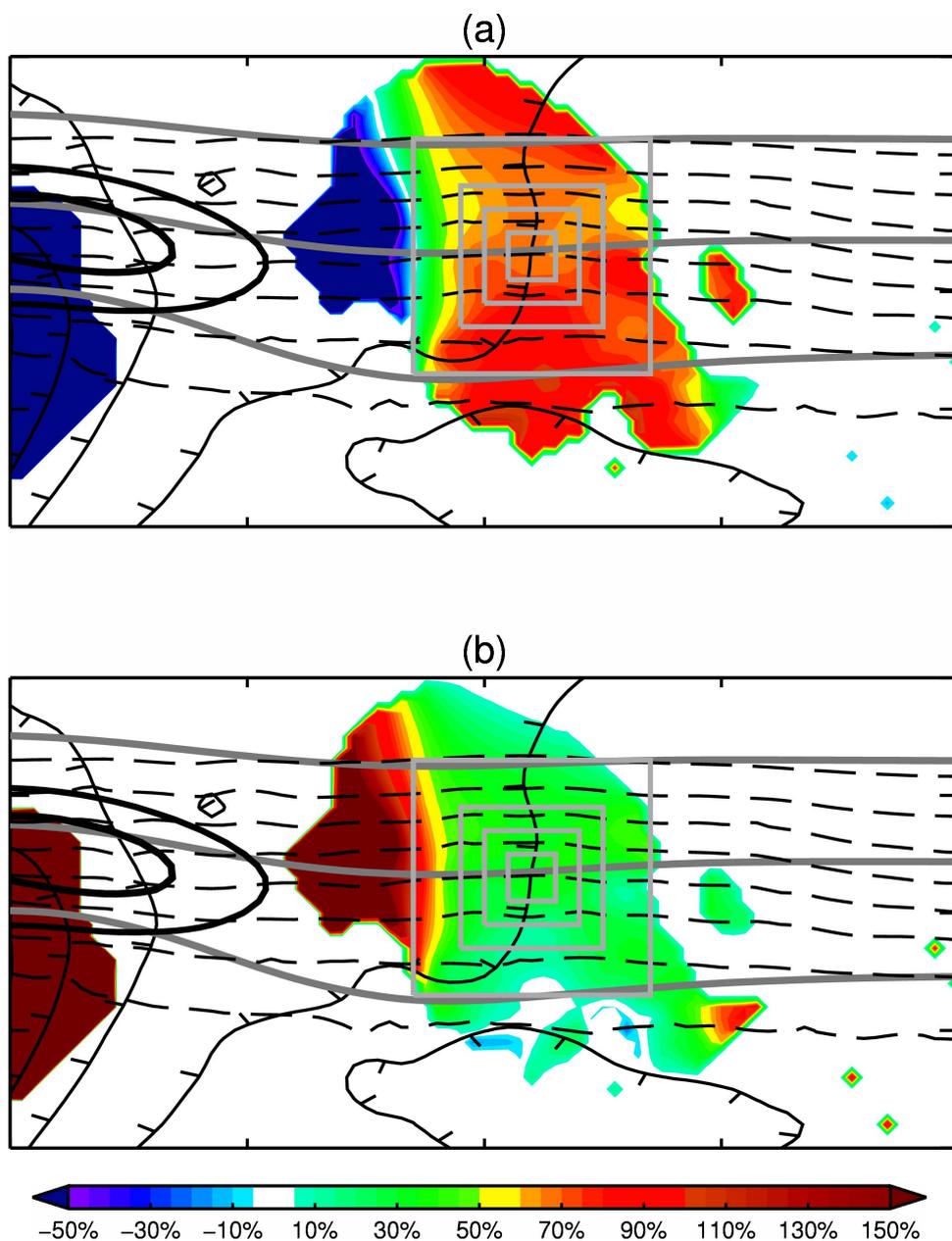


Abbildung 4.36: Prozentualer Anteil der Komponenten zur gesamten Vertikalbewegung auf 520 hPa (Farben) bei $t = 144$ h.

(a): $\Omega_{HT} = \omega_{curv} / \omega$.

(b): $\Omega_{JS} = (\omega_{st} + \omega_{shdv}) / \omega$.

Die hellgrauen Quadrate markieren die Bereiche, in denen jeweils über alle Gitterpunkte mit $\omega < 0,005 \text{ Pas}^{-1}$ gemittelt wurde.

Ansonsten wie bei Abbildung 4.3.

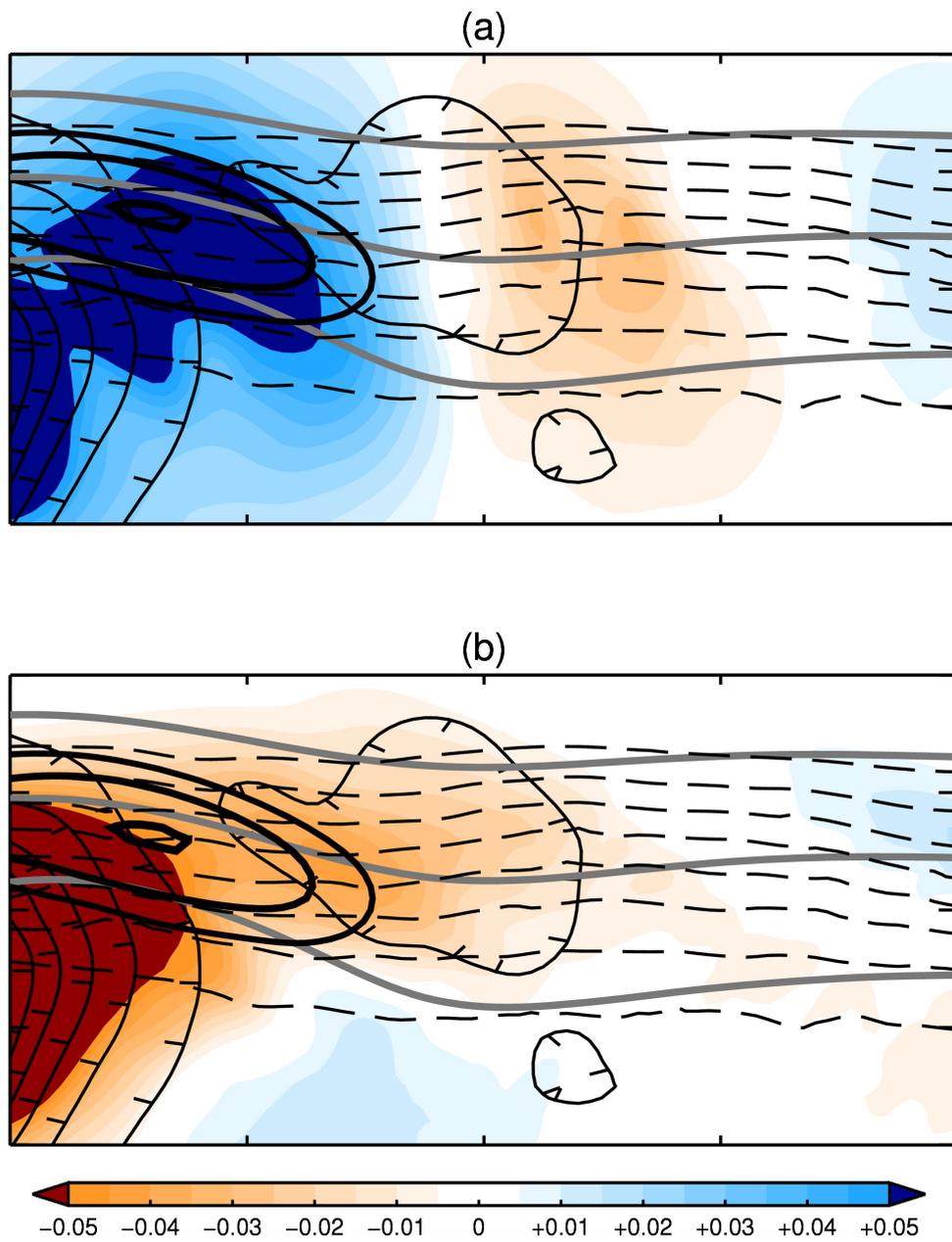
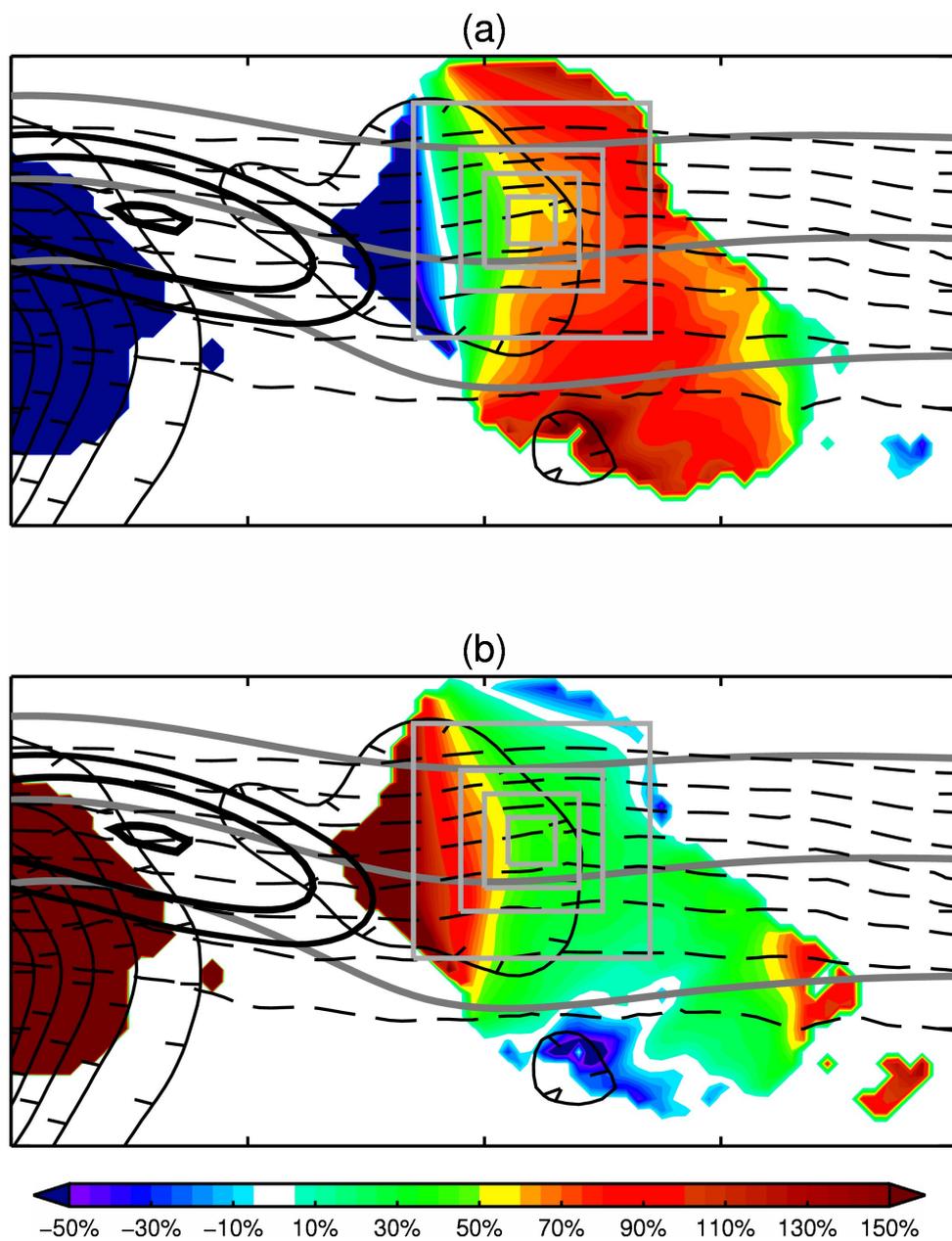


Abbildung 4.37: Wie bei Abbildung 4.35, aber bei $t = 144$ h.

Abbildung 4.38: Wie Abbildung 4.36, aber bei $t = 144$ h.

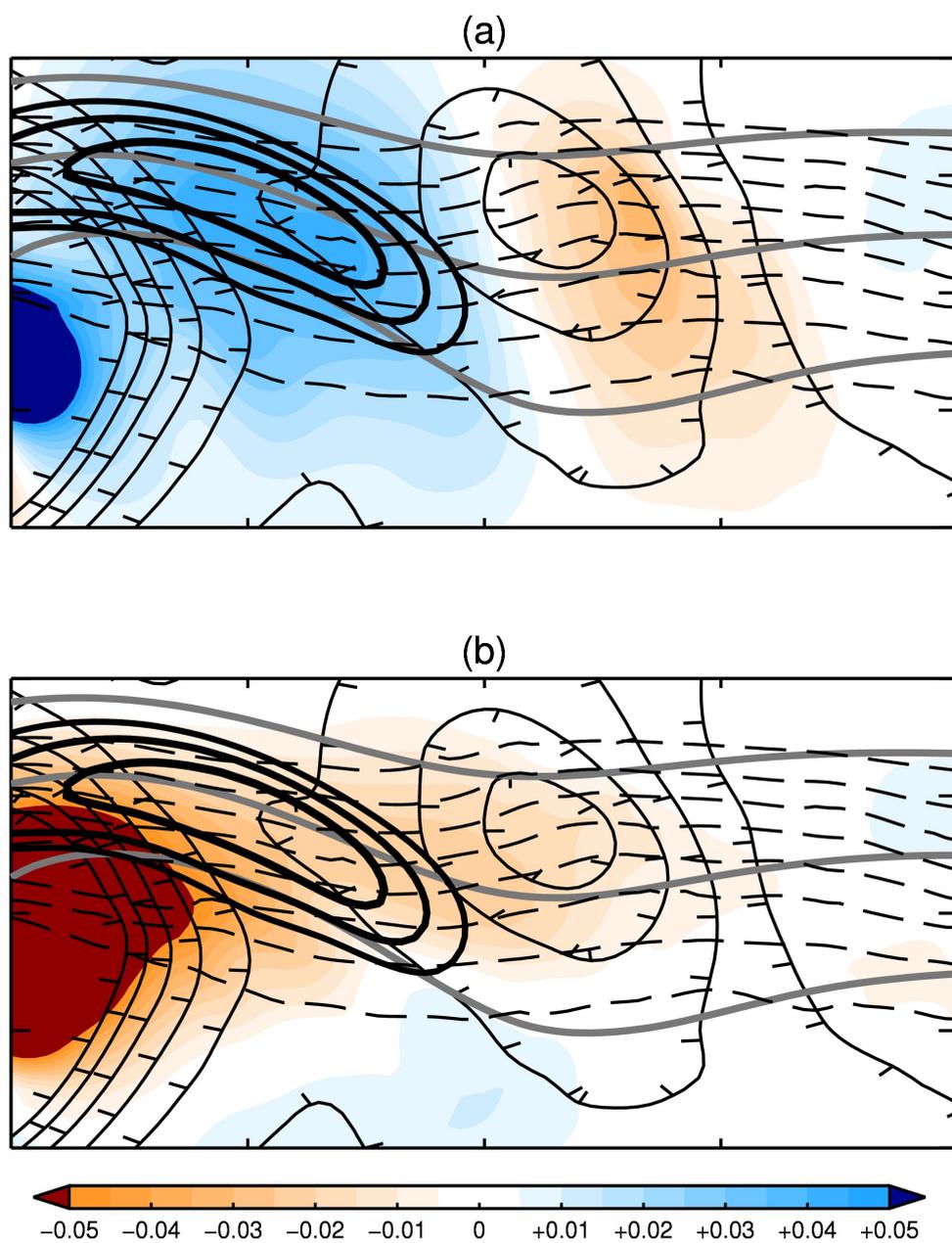
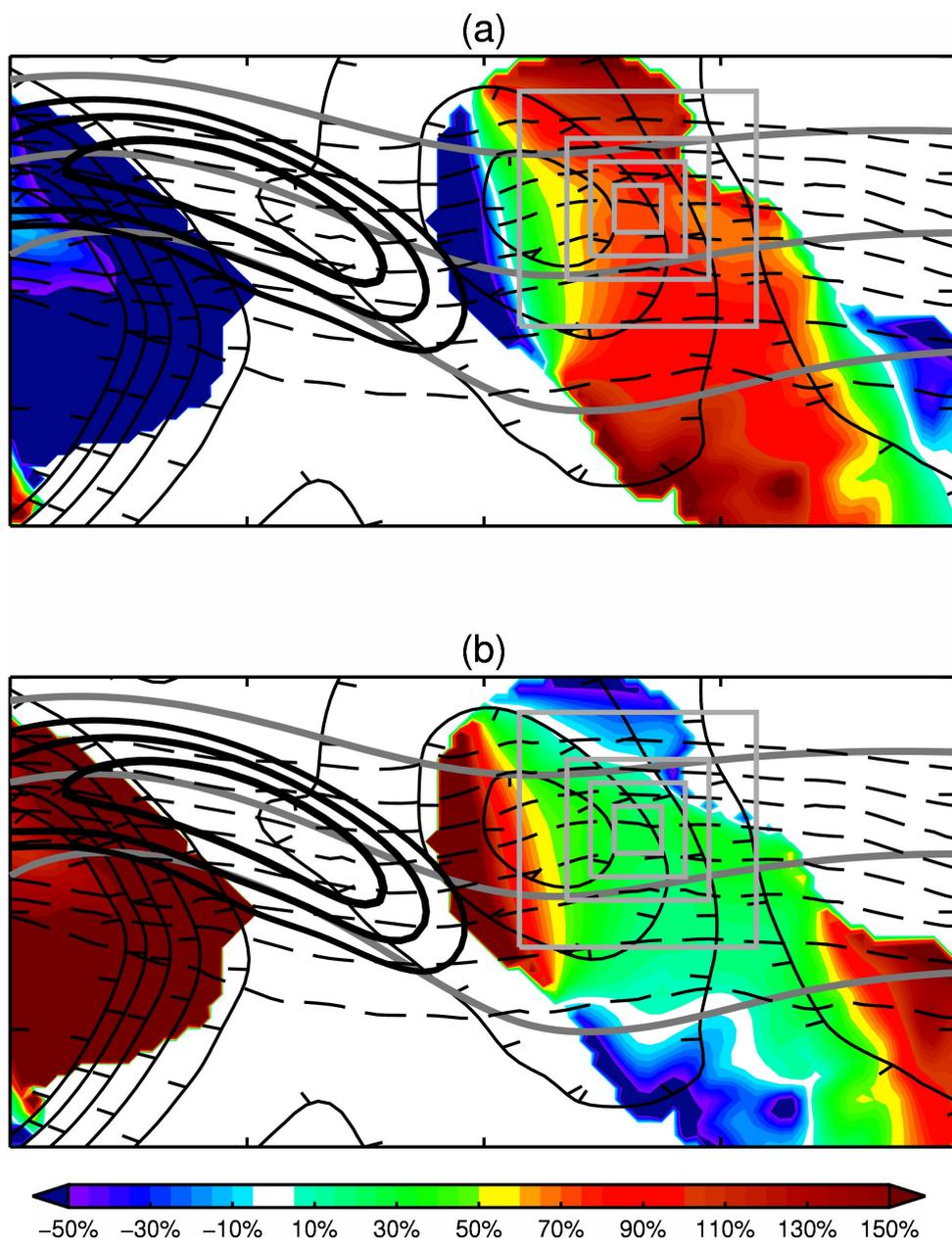


Abbildung 4.39: Wie bei Abbildung 4.35, aber bei $t = 156$ h.

Abbildung 4.40: Wie Abbildung 4.36, aber bei $t = 156$ h.

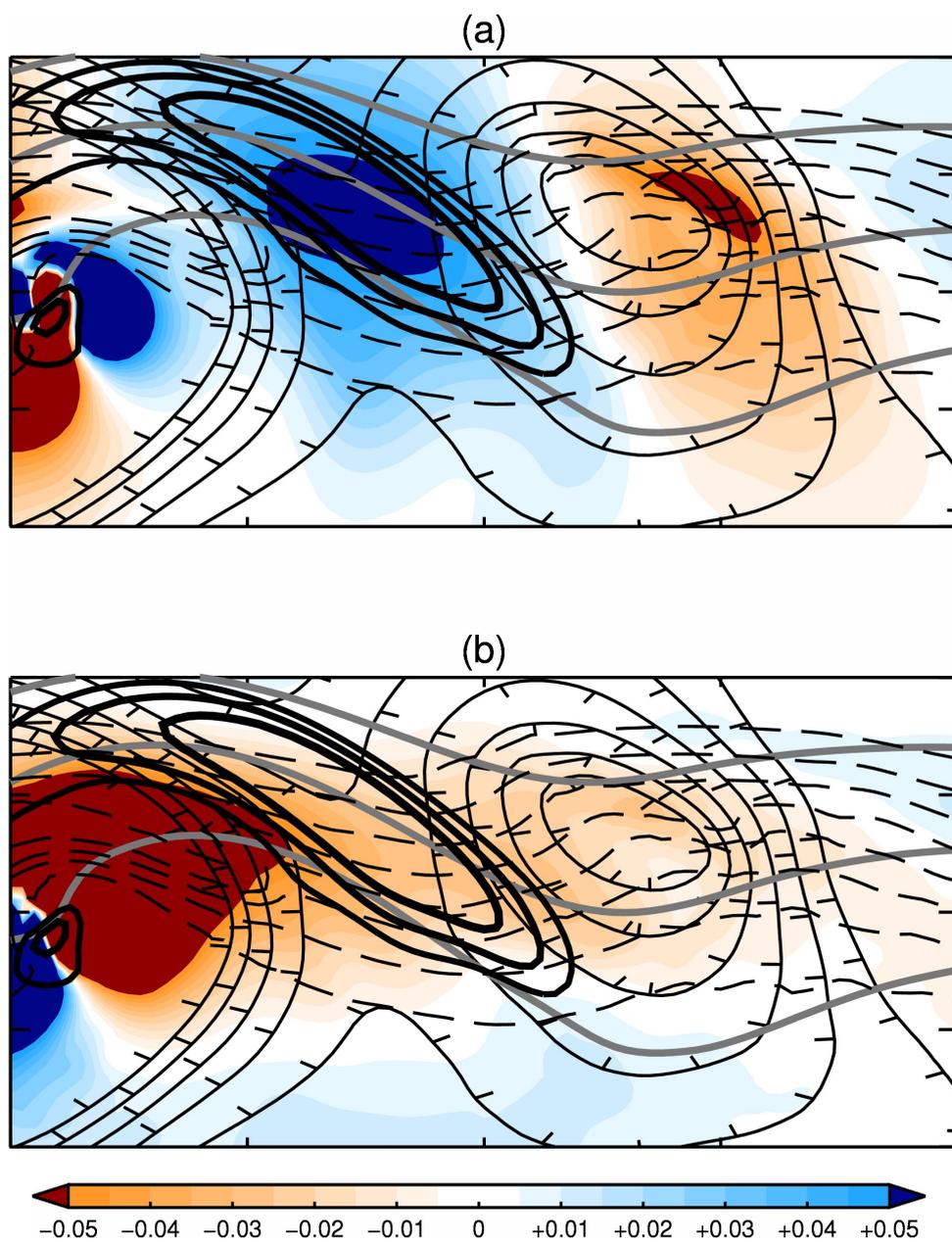
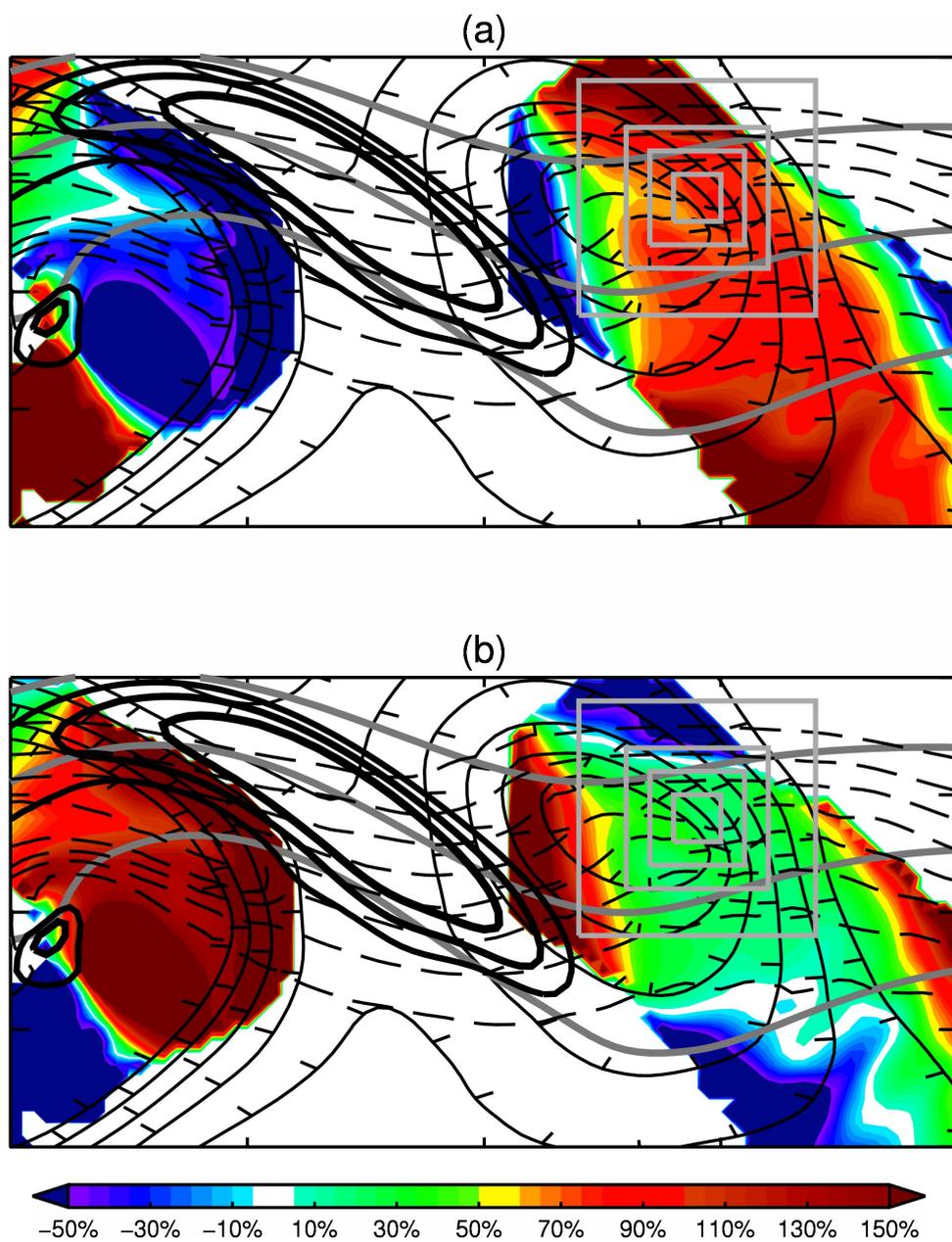


Abbildung 4.41: Wie bei Abbildung 4.35, aber bei $t = 168$ h.

Abbildung 4.42: Wie Abbildung 4.36, aber bei $t = 168$ h.

4.7.2 Betrachtung der Mittelwerte und Fazit

Nun werden die oben angesprochenen arithmetischen Mittelwerte betrachtet. Zunächst sei noch einmal die Vorgehensweise bei der Mittelung erläutert:

Die Mittelwerte von Ω_{HT} und Ω_{JS} , $\overline{\Omega_{HT}}$ und $\overline{\Omega_{JS}}$ wurden bei jedem der hier betrachteten Zeitpunkte in einem quadratischen Bereich, dessen Zentrum jeweils der Gitterpunkt mit dem maximalen Aufsteigen im Bereich der sich entwickelnden Zyklone ist, gebildet. Da die Wahl dieses Bereichs subjektiv ist, wurden vier verschiedene Quadrate gewählt, um so die Sensitivität auf die Unterschiede bei dieser subjektiven Wahl einschätzen zu können (siehe hellgraue Markierungen in den die Verhältnisse zeigenden Abbildungen 4.36, 4.38, 4.40 und 4.42). Dabei wurden für die Kantenlängen der quadratischen Bereiche 4, 8, 12 und 20 Gitterpunkte gewählt. Die Werte an den jeweiligen Rändern dieser quadratischen Bereiche wurden grundsätzlich bei der Mittelung mit einbezogen. Nicht mit einbezogen wurden bei der Mittelung allerdings Gitterpunkte, für die $\omega \geq -0,005 \text{ Pa s}^{-1}$ gilt. Das heißt zum Beispiel, dass bei $t = 156 \text{ h}$ und bei $t = 168 \text{ h}$ bei den beiden größeren Bereichen die Gitterpunkte ganz im Nord-Osten des quadratischen Bereichs bei der Mittelung nicht berücksichtigt wurden. Nach Meinung des Autors dieser Arbeit sind die Werte von Ω_{HT} und Ω_{JS} dort entweder aufgrund der sehr geringen Aufwärtsbewegung nicht sehr aussagekräftig oder es liegt dort sogar Absinken vor, wodurch die Mittelwerte sich nicht mehr ausschließlich auf ein Gebiet mit Aufsteigen beziehen würden.

Die Tabelle 4.2 zeigt die Ergebnisse dieser Mittelung jeweils bei den 4 betrachteten Zeiten für die 4 betrachteten quadratischen Bereiche. Wie man sieht, liegt der Mittelwert des auf den Höhentrog zurückgeführten Anteils der Vertikalbewegung $\overline{\Omega_{HT}}$ bei allen Zeiten und für alle quadratischen Bereiche über 50 %. Die Werte sollen nun zuerst getrennt für die Entstehungs- und Intensivierungsphase besprochen werden. Danach werden die – ebenfalls in Tabelle 4.2 gezeigten – aus einer nochmaligen Mittelung über die 4 betrachteten quadratischen Bereiche erhaltenen Durchschnittswerte und die entsprechenden Standardabweichungen graphisch dargestellt.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die in Tabelle 4.2 auf eine Nachkommastelle genau angegebenen Prozentwerte *nicht* suggerieren sollen, dass die hier angegebene Einschätzung eine entsprechende Genauigkeit für sich beansprucht. Vielmehr erklärt sich die Genauigkeit in diesen Angaben daraus, dass die Sensitivität auf die Wahl des betrachteten Gebiets, über das jeweils gemittelt wurde, gut erkennbar sein soll.

4.7.2.1 Entstehungsphase

Bei $t = 132 \text{ h}$ bestätigt sich recht gut die erste Einschätzung, dass der Anteil der auf den Höhentrog zurückgeführten Vertikalbewegung an der stromabwärts von ET induzierten Zyklogese hier etwa zweimal so groß ist, wie der Anteil der auf den Jetstreak zurückgeführten Vertikalbewegung. Die Sensitivität auf die Wahl des für die Mittelung herangezogenen quadratischen Bereichs ist nicht sehr groß. Alle Werte von $\overline{\Omega_{HT}}$ liegen hier zwischen 65 % und 70 %.

Bei $t = 144 \text{ h}$ überwiegt $\overline{\Omega_{HT}}$ nicht so deutlich wie zuvor. Hier liegen die Werte von $\overline{\Omega_{HT}}$ zwischen 50 % und 60 %. Die Sensitivität auf die Wahl des für die Mittelung herangezogenen quadratischen Bereichs ist hier recht hoch. Grundsätzlich sollte man aber wohl den Werten, die aus den beiden kleineren quadratischen Bereichen gewonnen wurden, etwas mehr Vertrauen schenken als den beiden anderen Werten, da bei

ersteren mehr – der für die Zyklogenese wichtigere – Kernbereich des Aufsteigens berücksichtigt wurde. Insofern kann man auch bei $t = 144$ h recht eindeutig dem Höhentrog den größeren Anteil an der Zyklogenese zusprechen.

4.7.2.2 Intensivierungsphase

Bei $t = 144$ h und $t = 156$ h, also zu beiden Zeiten der Intensivierungsphase, sprechen die Werte eine sehr eindeutige Sprache. Bei diesen beiden Zeiten liegen die Werte für alle für die Mittelung herangezogenen quadratischen Bereiche bei über 70 %. Im Mittel ist das mit dem Höhentrog in Verbindung zu bringende Aufsteigen innerhalb der betrachteten quadratischen Bereiche in dieser Phase etwa drei bis vier mal so stark wie das mit dem Jetstreak in Verbindung zu bringende Aufsteigen.

	$\overline{\Omega_{HT}}$	$\overline{\Omega_{JS}}$
t = 132 h		
k=4	67,7 %	32,3 %
k=8	69,5 %	30,5 %
k=12	69,8 %	30,2 %
k=20	66,3 %	33,7 %
$\varnothing \pm \sigma$	68,3 % \pm 1,6 %	31,7 % \pm 1,6 %
t = 144 h		
k=4	57,5 %	42,5 %
k=8	56,3 %	43,7 %
k=12	55,4 %	44,6 %
k=20	50,4 %	49,6 %
$\varnothing \pm \sigma$	54,9 % \pm 3,1 %	45,1 % \pm 3,1 %
t = 156 h		
k=4	73,9 %	26,1 %
k=8	75,4 %	24,6 %
k=12	76,2 %	23,8 %
k=20	74,3 %	25,7 %
$\varnothing \pm \sigma$	75,0 % \pm 1,0 %	25,0 % \pm 1,0 %
t = 168 h		
k=4	74,0 %	26,0 %
k=8	74,9 %	25,1 %
k=12	80,2 %	19,8 %
k=20	81,4 %	18,6 %
$\varnothing \pm \sigma$	77,6 % \pm 3,7 %	22,4 % \pm 3,7 %

Tabelle 4.2: Gemittelte Werte der Verhältnisse der mit dem Höhentrog in Verbindung zu bringenden Vertikalbewegung ω_{curv} und der mit dem Jetstreak in Verbindung zu bringenden Vertikalbewegung $\omega_{st} + \omega_{shdv}$ zur Vertikalbewegung $\omega = \omega_{curv} + \omega_{st} + \omega_{shdv}$ auf 520 hPa für die 4 betrachteten Zeiten. Gezeigt für die verschiedenen quadratischen Gebiete mit der Kantenlänge k , jeweils in Gitterpunkten. Zusätzlich sind jeweils die Durchschnittswerte der Mittelwerte (\varnothing) und die Standardabweichung (σ) angegeben. Die Werte wurden auf die erste Nachkommastelle gerundet.

4.7.2.3 Graphische Darstellung

Die oben besprochenen Werte sollen nun zur Veranschaulichung noch einmal graphisch dargestellt werden.

Die Abbildung 4.43 zeigt die jeweiligen Durchschnittswerte für die vier Zeiten aus Tabelle 4.2. Außerdem sind die Standardabweichungen dieser in Form von Fehlerbalken eingezeichnet. Die 50 %-Linie ist durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet.

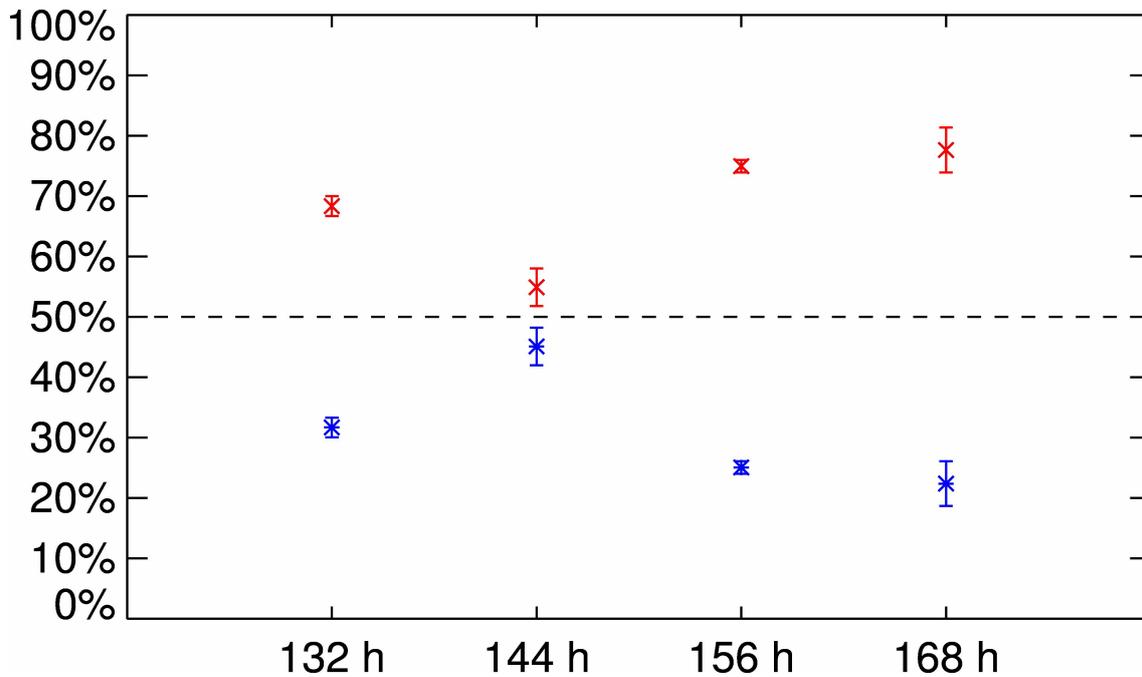


Abbildung 4.43: Mittelwerte der gemittelten Verhältnisse des Beitrags der dem Höhentrog zugeschriebenen Vertikalbewegung (rot) und des Beitrags der dem Jetstreak zugeschriebenen Vertikalbewegung (blau) aus Tabelle 4.2 für die 4 betrachteten Zeitpunkte. Die Fehlerbalken zeigen jeweils die Standardabweichung. Die gestrichelte Linie liegt bei 50 %.

4.7.2.4 Abschließendes Fazit

Das Fazit dieser Arbeit lautet also zusammengefasst, dass der Höhentrog bei der hier betrachteten stromabwärts von ET induzierten Zyklogenese insgesamt den deutlich größeren Anteil an dieser hat, als der Jetstreak. Insgesamt ist das Verhältnis des Anteils des Höhentrogs zu dem des Jetstreaks etwa 2 zu 1.

5. Zusammenfassung und Ausblick

5.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Frage nach der relativen Bedeutung der Eigenschaften der atmosphärischen Strömung für die stromabwärts eines ET-Systems auftretende Zyklogenese untersucht. Dies geschah mit Hilfe der Q-Vektor-Partitionierung von *Jusem & Atlas* (1998) und unter Verwendung der Daten eines numerischen Experiments (siehe *Riemer et al.*, 2008). Konkret war die Fragestellung dabei, wie groß der relative Einfluss, einerseits des Höhentrogs und andererseits des für ET typischen Jetstreaks, auf diese Zyklogenese ist.

Von den drei verwendeten Q-Vektor-Anteilen wurde einer, nämlich Q_{curv} , mit dem Höhentrog in Verbindung gebracht, da dieser mit der Krümmung der Stromlinien zusammenhängt. Die anderen beiden, Q_{st} und Q_{shdv} wurden mit dem Jetstreak in Verbindung gebracht. Ersterer, da er mit Konfluenz und Diffluenz, wie sie im Ein- und Ausgangsbereich eines Jetstreaks auftreten, in Zusammenhang steht. Letzterer, da er mit Temperaturadvektion durch horizontale Windscherung zusammenhängt, die im Jetstreak – bei dort vorhandener Temperaturadvektion – ein lokales Extremum erreicht.

Als Indikator für die jeweiligen Einflüsse von Höhentrog und Jetstreak wurden die aus den Feldern der drei Q-Vektor-Anteile durch Ausnutzung der Linearität der Omega-Gleichung erhaltenen entsprechenden Vertikalgeschwindigkeitsanteile genutzt. Dies wurde durch einen Vergleich mit der gesamten Modell-Vertikalbewegung legitimiert, der ergab, dass die aus dem Q-Vektor bestimmte Vertikalbewegung, im Rahmen der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchung, als ausreichend repräsentativ für erstere angesehen werden kann.

Sowohl in der Entstehungsphase als auch in der Intensivierungsphase der stromabwärts von ET induzierten Zyklone wurde das in der Vertikalbewegung zu erkennende Aufsteigen im Bereich der sich intensivierenden Zyklone weitgehend auf die dem Höhentrog zuzuordnende Komponente ω_{curv} zurückgeführt. Da außerdem gezeigt wurde, dass die hier betrachtete Vertikalbewegung nahezu ausschließlich durch die Verhältnisse in der oberen Troposphäre forciert wird, wurde davon ausgegan-

gen, dass der Höhentrog die größte Rolle bei der stromabwärts von ET induzierten Zyklogenese spielt.

Darüber hinaus wurde der Schluss gezogen, dass nicht nur die Komponente ω_{st} durch das aus Diffluenz resultierende Aufsteigen im linken Ausgangsbereich des Jetstreaks, sondern auch die dritte Komponente ω_{shdv} in dem hier betrachteten numerischen Experiment im Bereich der entstehenden Zyklone durch Warmluftadvektion im Bereich des Jetstreaks zu dem dortigen Aufsteigen beiträgt, was hier als negativer Shapiro-Effekt bezeichnet wurde. Daraus wurde gefolgert, dass sich der gesamte *nicht* dem Höhentrog zugeschriebene Anteil der zur stromabwärts von ET auftretenden Zyklogenese führenden Vertikalbewegung weitgehend dem Jetstreak zuschreiben lässt. Das Verhältnis der Rolle des Höhentrogs zu der des Jetstreaks bei der stromabwärts von ET induzierten Zyklogenese wurde, dieser Sichtweise folgend, auf etwa 2 zu 1 abgeschätzt.

5.2 Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war, den Einfluss einzelner Merkmale der Höhenströmung bei der stromabwärts eines ET-Systems induzierten Zyklogenese besser zu verstehen.

In diesem Zusammenhang auch zu erwähnen sind die Ergebnisse der parallel zu dieser Arbeit angefertigten Bachelorarbeit von Marlene Baumgart (*Baumgart, 2012*). In dieser wurde im Rahmen von Fallstudien die stromabwärts von ET stattfindende Zyklogenese anhand von ET-Fällen in der realen Atmosphäre untersucht, wobei auch die Q-Vektor-Partitionierung von *Jusem & Atlas (1998)* angewendet wurde.

Auch in *Baumgart (2012)* wurde gefolgert, dass für den Fall der dort betrachteten realen ET-Fälle der Höhentrog die größte Rolle bei der stromabwärts induzierten Zyklogenese spielt.

Des Weiteren zeigte sich in *Baumgart (2012)*, dass sich bei realen ET-Fällen die Komponenten ω_{st} und ω_{shdv} nicht zwangsläufig beide konstruktiv auf die Zyklogenese auswirken müssen und sich teilweise sogar kompensieren können. Das zeigt, dass die in dieser Arbeit im numerischen Modell gefundene konstruktive Überlagerung dieser beiden Komponenten nur einen Spezialfall darstellt.

Es wäre sicherlich interessant, in weiteren Studien noch näher zu untersuchen, wie sich im Einzelfall die auftretende relative Lage des Jetstreaks und der durch ihn aufgrund von Temperaturadvektion auftretende Shapiro-Effekt auf die Strömung stromabwärts von ET auswirken. Eventuell wäre auch eine Klassifikation der stromabwärts von ET induzierten Zyklogenese, je nach Lage des Jetstreaks und dem Vorzeichen der durch ihn hervorgerufenen Temperaturadvektion, sinnvoll. Dabei könnte man möglicherweise nicht nur die stromabwärts induzierte Zyklogenese, sondern auch Phänomene wie beispielsweise die Frontogenese in der oberen Troposphäre und deren Einfluss auf die weitere Entwicklung der Strömung besser verstehen.

Anhang A:

Beschreibung der numerischen Inversion der Omega-Gleichung

In diesem Kapitel wird die numerische Inversion der Omega-Gleichung ausführlicher als im Methodik-Teil dieser Arbeit beschrieben.

A.1 Zentrierte Differenzen

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$, die in einem Intervall $[x - h, x + h]$ stetig ist und dort eine stetige erste Ableitung besitzt und deren zweite Ableitung im Innern des Intervalls noch existiert.

Dann kann man die Taylor-Entwicklung dieser Funktion ausführen.

Die Taylorsche Formel lautet:

$$f_{(x+h)} = f_{(x)} + \frac{h}{1!} f'_{(x)} + \frac{h^2}{2!} f''_{(x)} + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}_{(x)} + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}_{(x+\Theta h)}, \quad (\text{A.1})$$

mit $0 < \Theta < 1$ (*Bronstein et al.*, 2001).

Nutzt man nun die Tatsache aus, dass die Größe h sowohl positiv als auch negativ sein darf und bricht die Taylor-Entwicklung nach dem dritten Term ab, so erhält man mit $\Delta x = h$:

$$f_{(x-\Delta x)} \approx f_{(x)} - \Delta x f'_{(x)} + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''_{(x)} \quad (\text{A.2a})$$

und

$$f_{(x+\Delta x)} \approx f_{(x)} + \Delta x f'_{(x)} + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''_{(x)}. \quad (\text{A.2b})$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man die folgenden beiden Ausdrücke für die erste und zweite Ableitung der Funktion $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2 \Delta x} (f_{(x+\Delta x)} - f_{(x-\Delta x)}) \quad (\text{A.3a})$$

und

$$f''(x) = \frac{1}{(\Delta x)^2} (f_{(x+\Delta x)} - 2 f_{(x)} + f_{(x-\Delta x)}). \quad (\text{A.3b})$$

Die Gleichung (A.3a) erhält man durch Bilden von (A.2b) – (A.2a) und anschließendes Auflösen nach $f'_{(x)}$.

Die Gleichung (A.3b) erhält man durch Bilden von (A.2a) + (A.2b) und anschließendes Auflösen nach $f''_{(x)}$.

A.2 Die Omega-Gleichung in zentrierten Differenzen

Ist die Vertikalgeschwindigkeit in Druckkoordinaten ω auf einem Gitter gesucht, dann kann man die Omega-Gleichung diskretisieren.

Die herkömmliche Omega-Gleichung ohne Alternative Balance (2.10) sei hier noch einmal angegeben:

$$\nabla_p (\sigma_{(i,j,p)} \nabla_p \omega_{(i,j,p)}) + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega_{(i,j,p)}}{\partial p^2} = F_{(i,j,p)}. \quad (\text{A.4})$$

Die Indizes i , j und p stehen dabei für den Zonalindex, den Meridionalindex und die Druckfläche.

Zerlegt man diese Gleichung nun in zentrierte Differenzen (siehe voriger Abschnitt), so ergibt sich allgemein eine Form, die folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} & A_1^{(i,j,p)} \omega_{i,j,p} + A_2^{(i,j,p)} \omega_{i-1,j,p} + A_3^{(i,j,p)} \omega_{i+1,j,p} + A_4^{(i,j,p)} \omega_{i,j-1,p} \\ & + A_5^{(i,j,p)} \omega_{i,j+1,p} + A_6^{(i,j,p)} \omega_{i,j,p-\Delta p} + A_7^{(i,j,p)} \omega_{i,j,p+\Delta p} = \frac{a^2}{\sigma_{i,j,p}} F_{i,j,p}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Dabei sind $A_n^{(i,j,p)}$ mit $n = 1, \dots, 7$ am jeweiligen Gitterpunkt (i, j, p) zu bestimmende Vorfaktoren, die sich nach der betrachteten Version der Omega-Gleichung richten und a ist die horizontale Gitterweite.

Die Tabelle A.2 zeigt noch einmal, welcher Vorfaktor zu welchem Gitterpunkt von ω gehört.

Vorfaktor	Zugehöriger Gitterpunkt von ω
$A_1^{(i,j,p)}$	i, j, p
$A_2^{(i,j,p)}$	$i - 1, j, p$
$A_3^{(i,j,p)}$	$i + 1, j, p$
$A_4^{(i,j,p)}$	$i, j - 1, p$
$A_5^{(i,j,p)}$	$i, j + 1, p$
$A_6^{(i,j,p)}$	$i, j, p - \Delta p$
$A_7^{(i,j,p)}$	$i, j, p + \Delta p$

Tabelle A.1: Vorfaktoren der Omega-Gleichung und dazugehörige Gitterpunkte bei ω

A.3 Vorfaktoren

Die nun folgenden Tabellen zeigen die Vorfaktoren zu den jeweils unterschiedlichen Versionen der Omega-Gleichung. Die jeweilige Version ist über jeder Tabelle noch einmal angegeben. Aus Platzgründen sind die Tabellen und die dazugehörigen Gleichungen um 90° gegen den Uhrzeigersinn rotiert.

A.3.1 Omega-Gleichung mit ausschließlich vom Druck abhängiger statischer Stabilität

$$\sigma \nabla_p^2 \omega + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q} \equiv F$$

Vorfaktoren:

$A_1^{(i,j,p)}$	$-1 \cdot \left(4 + \frac{2a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p}(\Delta p)^2}\right)$
$A_2^{(i,j,p)}$	1
$A_3^{(i,j,p)}$	1
$A_4^{(i,j,p)}$	1
$A_5^{(i,j,p)}$	1
$A_6^{(i,j,p)}$	$\frac{a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p}(\Delta p)^2}$
$A_7^{(i,j,p)}$	$\frac{a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p}(\Delta p)^2}$

Tabelle A.2: Vorfaktoren der Omega-Gleichung für ausschließlich vom Druck abhängige statische Stabilität

A.3.2 Omega-Gleichung mit von allen Ortskoordinaten abhängiger statischer Stabilität

$$\nabla_p (\sigma \nabla_p \omega) + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q} \equiv F$$

Vorfaktoren:

$A_1^{(i,j,p)}$	$-1 \cdot \left(4 + \frac{2a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p}(\Delta p)^2}\right)$
$A_2^{(i,j,p)}$	$1 - \frac{1}{4\sigma_{i,j,p}} (\sigma_{i+1,j,p} - \sigma_{i-1,j,p}) = 1 - S_{i,j,p}^{(i)}$
$A_3^{(i,j,p)}$	$1 + S_{i,j,p}^{(i)}$
$A_4^{(i,j,p)}$	$1 - \frac{1}{4\sigma_{i,j,p}} (\sigma_{i,j+1,p} - \sigma_{i,j-1,p}) = 1 - S_{i,j,p}^{(j)}$
$A_5^{(i,j,p)}$	$1 + S_{i,j,p}^{(j)}$
$A_6^{(i,j,p)}$	$\frac{a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p}(\Delta p)^2}$
$A_7^{(i,j,p)}$	$\frac{a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p}(\Delta p)^2}$

Tabelle A.3: Vorfaktoren der Omega-Gleichung für von allen Ortskoordinaten abhängige statische Stabilität.

A.3.3 Omega-Gleichung mit lokaler statischer Stabilität mit Formeln aus *Davies-Jones* (1991) in Druckkoordinaten konvertiert

$$\nabla_p (\sigma \nabla_p \omega) + f_0^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \frac{1}{p} \frac{C_v}{C_p} \frac{\partial \omega}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{C_v}{C_p} \omega \right) = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}_{AB} \equiv F_{AB}$$

Vorfaktoren:

$A_1^{(i,j,p)}$	$-1 \cdot \left(4 + \frac{2a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p} (\Delta p)^2} - \frac{a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p}} \frac{C_v}{p^2 C_p} \right)$
$A_2^{(i,j,p)}$	$1 - \frac{1}{2\sigma_{i,j,p}} (\sigma_{i+1,j,p} - \sigma_{i-1,j,p}) = 1 - S_{i,j,p}^{(i)}$
$A_3^{(i,j,p)}$	$1 + S_{i,j,p}^{(i)}$
$A_4^{(i,j,p)}$	$1 - \frac{1}{2\sigma_{i,j,p}} (\sigma_{i,j+1,p} - \sigma_{i,j-1,p}) = 1 - S_{i,j,p}^{(j)}$
$A_5^{(i,j,p)}$	$1 + S_{i,j,p}^{(j)}$
$A_6^{(i,j,p)}$	$\frac{a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p} (\Delta p)^2} + \frac{a^2 f_0^2}{2 \sigma_{i,j,p}} \frac{C_v}{\Delta p p C_p}$
$A_7^{(i,j,p)}$	$\frac{a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p} (\Delta p)^2} - \frac{a^2 f_0^2}{2 \sigma_{i,j,p}} \frac{C_v}{\Delta p p C_p}$

Tabelle A.4: Vorfaktoren der Omega-Gleichung mit Formeln aus *Davies-Jones* (1991) in Druckkoordinaten konvertiert.

A.3.4 Omega-Gleichung mit lokaler statischer Stabilität und Alternativer Balance nach Mallet et al. (1999)

$$\begin{aligned}
& \sigma \nabla_p^2 \omega + f_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} \\
& + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{h C_v}{p C_p} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{h C_v}{p C_p} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega \frac{h C_v}{p C_p} \nabla_p^2 \theta = \\
& = -2 \nabla_p \cdot \mathbf{Q}_{AB} \quad (+ \text{vernachlässigte weitere Terme}) \equiv F_{AB} \quad (+ \text{vernachlässigte weitere Terme})
\end{aligned}$$

Vorfaktoren:

$A_1^{(i,j,p)}$	$-1 \cdot \left(4 + \frac{2a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p} (\Delta p)^2} + \frac{h C_v}{\sigma_{i,j,p} p C_p} (\theta_{i+1,j,p} + \theta_{i,j+1,p} - 4\theta_{i,j,p} + \theta_{i-1,j,p} + \theta_{i,j-1,p}) \right) = -1 \cdot \left(4 + \frac{2a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p} (\Delta p)^2} + T_{i,j,p}' \right)$
$A_2^{(i,j,p)}$	$1 - S_{i,j,p}^{(i)} + \frac{h C_v}{4\sigma_{i,j,p} p C_p} (\theta_{i+1,j,p} - \theta_{i-1,j,p}) = 1 - S_{i,j,p}^{(i)} + T_{i,j,p}^{(i)}$
$A_3^{(i,j,p)}$	$1 + S_{i,j,p}^{(i)} - T_{i,j,p}^{(i)}$
$A_4^{(i,j,p)}$	$1 - S_{i,j,p}^{(j)} + \frac{h C_v}{4\sigma_{i,j,p} p C_p} (\theta_{i,j+1,p} - \theta_{i,j-1,p}) = 1 - S_{i,j,p}^{(j)} + T_{i,j,p}^{(j)}$
$A_5^{(i,j,p)}$	$1 + S_{i,j,p}^{(j)} - T_{i,j,p}^{(j)}$
$A_6^{(i,j,p)}$	$\frac{a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p} (\Delta p)^2}$
$A_7^{(i,j,p)}$	$\frac{a^2 f_0^2}{\sigma_{i,j,p} (\Delta p)^2}$

Tabelle A.5: Vorfaktoren der Omega-Gleichung mit AB nach Mallet et al. (1999)

A.4 Inversion der Omega-Gleichung mit sukzessiver Überrelaxation

Vorbemerkung:

Dieser Abschnitt beruht im Wesentlichen auf der Beschreibung der sukzessiven Überrelaxation, welche in Press et al. (2001) auf Seite 857ff gegeben ist. Das Verfahren wird hier jedoch speziell für den Fall der Omega-Gleichung erklärt. Für eine allgemeinere Erklärung sowie eine Diskussion der Konvergenzeigenschaften und der Konvergenzoptimierung mit Chebyshev-Beschleunigung sei auf Press et al. (2001) verwiesen.

Bei der sukzessiven Überrelaxation (*engl.*: successive over-relaxation – SOR) handelt es sich um eine Erweiterung des Einzelschrittverfahrens (letzteres auch: Gauß-Seidel-Verfahren).

Die Durchführung der SOR für die Inversion der Omega-Gleichung soll im Folgenden beschrieben werden.

Ausgehend von Gleichung (A.5) kann man einen Ausdruck für Omega am Gitterpunkt (i, j, p) – welches im Folgenden mit $\omega_{i,j,p}^*$ bezeichnet wird – erhalten.

$$\omega_{i,j,p}^* = \frac{1}{A_1^{(i,j,p)}} \left(\begin{aligned} & \frac{a^2}{\sigma_{i,j,p}} F_{i,j,p} - A_2^{(i,j,p)} \omega_{i-1,j,p} - A_3^{(i,j,p)} \omega_{i+1,j,p} - A_4^{(i,j,p)} \omega_{i,j-1,p} \\ & - A_5^{(i,j,p)} \omega_{i,j+1,p} - A_6^{(i,j,p)} \omega_{i,j,p-\Delta p} - A_7^{(i,j,p)} \omega_{i,j,p+\Delta p} \end{aligned} \right). \quad (\text{A.6})$$

Bei der Iteration wird ein neues $\omega_{i,j,p}^{(N+1)}$ berechnet, welches sich aus dem untergewichteten alten $\omega_{i,j,p}^{(N)}$ sowie dem nach Gleichung (A.6) berechnetem $\omega_{i,j,p}^*$ wie folgt zusammensetzt:

$$\omega_{i,j,p}^{(N+1)} = \Omega_{SOR} \omega_{i,j,p}^* + (1 - \Omega_{SOR}) \omega_{i,j,p}^{(N)}. \quad (\text{A.7})$$

Dabei bezeichnet man Ω_{SOR} als Überrelaxationsparameter. Dieser ist aus dem Intervall $(1, 2)$ zu wählen, und sein Wert entscheidet über die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens.

Die Gleichung (A.7) kann man praktisch in ein Programm implementieren. Man berechnet hierzu nach jedem Iterationsschritt N (durch ein hochgestelltes N gekennzeichnet) ein Residuum $\xi_{i,j,p}^{(N)}$, welches die Differenz zwischen der linken und der im Iterationsschritt N bestimmten rechten Seite von Gleichung (A.5) gegeben ist:

$$\begin{aligned} \xi_{i,j,p}^{(N)} = & A_1^{(i,j,p)} \omega_{i,j,p}^{(N)} + A_2^{(i,j,p)} \omega_{i-1,j,p}^{(N)} + A_3^{(i,j,p)} \omega_{i+1,j,p}^{(N)} + A_4^{(i,j,p)} \omega_{i,j-1,p}^{(N)} \\ & + A_5^{(i,j,p)} \omega_{i,j+1,p}^{(N)} + A_6^{(i,j,p)} \omega_{i,j,p-\Delta p}^{(N)} + A_7^{(i,j,p)} \omega_{i,j,p+\Delta p}^{(N)} \\ & - \frac{a^2}{\sigma_{i,j,p}} F_{i,j,p}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Damit erhält man einen einfach zu implementierenden Ausdruck für Gleichung (A.7):

$$\omega_{i,j,p}^{(N+1)} = \omega_{i,j,p}^{(N)} - \Omega_{SOR} \frac{\xi_{i,j,p}^{(N)}}{A_1^{(i,j,p)}}. \quad (\text{A.9})$$

Durch wiederholtes Anwenden dieses Verfahrens kann man die exakte Lösung der Omega-Gleichung annähern und – sobald das Residuum $\xi_{i,j,p}^{(N)}$ an jedem Gitterpunkt einen vorgegebenen Wert (= Abbruchresiduum) unterschritten hat – die Iteration abbrechen.

Nach N_{abb} Iterationsschritten hat man dann durch die einzelnen $\omega_{i,j,p}^{(N_{abb})}$ auf dem Gitter die Näherungs-Lösung mit der durch das Abbruchresiduum bestimmten Genauigkeit erhalten.

Für den in *Press et al.* (2001) angegebenen Algorithmus mit Chebyshev-Beschleunigung muss man einen Wert für den Jacobi-Radius der Iterationsmatrix des Problems ρ_{jac} einsetzen. Dieser wäre bei der in dieser Arbeit auftretenden Größe des Gitters (Anzahl der Gitterpunkte = $288 \times 141 \times 18 = 730944$) wohl nur unter größtem Aufwand exakt bestimmbar gewesen.

Durch eine Erweiterung einer Formel aus *Press et al.* (2001) für ein zweidimensionales rechteckiges Gitter auf das hier verwendete dreidimensionale Gitter kann man folgende Näherungs-Formel für den Jacobi-Radius erhalten:

$$\rho_{jac} \approx \frac{\cos\left(\frac{\pi}{I}\right) + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{J}\right) + \left(\frac{f_0 \Delta x}{N \Delta z}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{K}\right)}{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{f_0 \Delta x}{N \Delta z}\right)^2}, \quad (\text{A.10})$$

wobei $I = 288$ und $J = 141$ die Anzahl der Gitterpunkte in zonaler und meridionaler Richtung und $\Delta x = 60$ km und $\Delta y = 60$ km die gleich großen Gitterweiten in zonaler und meridionaler Richtung sind. Für die vertikale Gitterweite Δz wird der ungefähre Mittelwert von 1,2 km eingesetzt. Der Skalierungs-Faktor $\frac{f_0}{N}$ entspricht dem Faktor vor der zweiten Ableitung nach dem Druck in der Omega-Gleichung, wobei f_0 der konstante Coriolis-Parameter ist und N die Brunt-Väisälä-Frequenz. Setzt man die für die Atmosphäre typischen Werte $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ und $N = 0,12 \text{ s}^{-1}$ in diese Formel ein, so erhält man $\rho_{jac} \approx 0,99985$. Dies deutet darauf hin, dass der exakte Jacobi-Radius der Iterationsmatrix im hier vorliegenden Fall sehr nahe an dem Wert 1 liegen müsste.

Empirisch wurde tatsächlich festgestellt, dass ein Wert von $\rho_{jac} \approx 0,999$ zu den besten Konvergenzgeschwindigkeiten führte. Deshalb wurde ρ_{jac} bei der Iteration für jeden Zeitschritt auf diesen Wert gesetzt.

Anhang B:

Mögliche Unstimmigkeiten in *Jusem & Atlas* (1998, S. 2184)

Wie im Methodik-Teil dieser Arbeit angesprochen wurde, ist es nach Meinung des Autors dieser Arbeit nicht auszuschließen, dass in *Jusem & Atlas* (1998, S. 2184) Unstimmigkeiten existieren. Die Gründe für diese Vermutung werden im Folgenden erläutert.

B.1 Erste mögliche Unstimmigkeit

Der zweite Satz nach Gleichung (B24) in *Jusem & Atlas* (1998, S. 2184) lautet:

„The product $s_g (\partial K_s / \partial s)$ contained in the first term of the rhs of (2.18) is the difference between (B24) and $K_n K_s s_g$.“

Demnach müsste Folgendes gelten:

$$s_g \frac{\partial K_s}{\partial s} = \frac{\partial K_s s_g}{\partial s} - K_n K_s s_g. \quad (\text{B.11})$$

Wendet man auf den ersten Term auf der rechten Seite dieser Gleichung die Produktregel an und nutzt man für den zweiten Term auf der rechten Seite die aus der verschwindenden Divergenz von \mathbf{v}_g folgende Beziehung $\partial s_g / \partial s = -K_n s_g$ aus, so erhält man:

$$s_g \frac{\partial K_s}{\partial s} = K_s \frac{\partial s_g}{\partial s} + s_g \frac{\partial K_s}{\partial s} + K_s \frac{\partial s_g}{\partial s}. \quad (\text{B.12})$$

Danach müsste $K_s \frac{\partial s_g}{\partial s} = -K_n K_s s_g = 0$ gelten. Das wäre allerdings äquivalent zu der Aussage, dass die Stromlinien von \mathbf{v}_g nicht gleichzeitig gekrümmt und konfluent bzw. diffluent sein können, was zum Beispiel zu den Verhältnissen eines in einen Höhentrog eingebetteten Jetstreaks, wo im Allgemeinen sowohl K_n als auch K_s verschieden von Null sind, im Widerspruch steht.

Setzt man aber $s_g \frac{\partial K_s}{\partial s}$ gleich der *Summe* aus $\frac{\partial K_s s_g}{\partial s}$ und $K_n K_s s_g$, dann ist die Aussage widerspruchsfrei.

B.2 Zweite mögliche Unstimmigkeit

Der dritte Satz nach Gleichung (B24) in *Jusem & Atlas* (1998, S. 2184) lautet:

„Finally $s_g (\partial K_n / \partial n)$, that belongs to the first term of the rhs of (2.20), is caclulated by adding (B23) and $K_n^2 s_g$ and changing the sign of the result. “

Demnach müsste Folgendes gelten:

$$s_g \frac{\partial K_n}{\partial n} = - \left(\frac{\partial^2 s_g}{\partial n \partial s} + K_n^2 s_g \right). \quad (\text{B.13})$$

Mit $\partial s_g / \partial s = -K_n s_g$ lässt sich diese Gleichung nach Anwendung der Produktregel auf die folgende Form bringen:

$$s_g \frac{\partial K_n}{\partial n} = s_g \frac{\partial K_n}{\partial n} + K_n \frac{\partial s_g}{\partial n} - K_n^2 s_g. \quad (\text{B.14})$$

Nach Subtraktion des Terms $s_g (\partial K_n / \partial n)$ auf beiden Seiten lautet diese Gleichung:

$$K_n \frac{\partial s_g}{\partial n} - K_n^2 s_g = 0. \quad (\text{B.15})$$

Daraus folgt dann, dass entweder K_n immer gleich Null ist, was nur in einer weder konfluenten noch diffluenten Strömung der Fall ist, oder aber dass Folgendes gilt:

$$\frac{\partial s_g}{\partial n} = K_n s_g. \quad (\text{B.16})$$

Das hieße aber, dass $\frac{\partial s_g}{\partial n} = -\frac{\partial s_g}{\partial s}$ gelten müsste. Das steht im Widerspruch zu den Verhältnissen beispielsweise in der Eingangs- bzw. Ausgangsregion eines geraden Jet-streaks, wo $\frac{\partial s_g}{\partial n}$ an der Jetachse sein Vorzeichen wechselt, was dort für $\frac{\partial s_g}{\partial s}$ aber nicht gilt.

Widerspruchsfrei wird Gleichung (B.13), wenn man in ihr $K_n^2 s_g$ durch $K_n (\partial s_g / \partial n)$ ersetzt.

B.3 Möglicher Druckfehler in Gleichung (B24)

Im zweiten Term auf der rechten Seite von Gleichung (B24) in *Jusem & Atlas* (1998, S. 2184) steht vor der Klammer ein $\partial u_g / \partial x$, welches vermutlich aus einem Druckfehler resultiert und demnach an dieser Stelle zu streichen wäre.

Literatur

- [Atallah & Bosart 2003] ATALLAH, E. H. ; BOSART, L. F.: **The extratropical transition and precipitation distribution of hurricane *Floyd* (1999)**. In: *Monthly Weather Review* **131** (2003), S. 1063–1081
- [Baumgart 2012] BAUMGART, M.: **Fallstudien stromabwärts induzierter Effekte von tropischen Wirbelstürmen mittels *Q*-Vektor-Aufteilung**. Bachelorarbeit an der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, 2012
- [Bosart & Lackmann 1995] BOSART, L. F. ; LACKMANN, G. M.: **Postlandfall tropical cyclone reintensification in a weakly baroclinic environment: A case study of hurricane *David* (September 1979)**. In: *Monthly Weather Review* **123** (1995), S. 3268–3291
- [Bronstein *et al.* 2001] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: **Taschenbuch der Mathematik**. 5., überarbeitete und erweiterte Auflage. Verlag Harri Deutsch, 2001
- [Cammass 2011] CAMMAS, J.-P.: **Persönliche Mitteilung**. 18. November 2011 (Zusendung von P. Mascart). – Handschriftliche Notizen zur AB-Omega-Gleichung
- [Davies-Jones 1991] DAVIES-JONES, R.: **The Frontogenetical Forcing of Secondary Circulations. Part I: The Duality and Generalization of the *Q* Vector**. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* **48** (1991), Nr. 4, S. 497–509
- [Dunn 1991] DUNN, L. B.: **Evaluation of Vertical Motion: Past, Present and Future**. In: *Weather and Forecasting* **6** (1991), S. 65–75
- [DWD 2012] DWD: **Wetterlexikon des Deutschen Wetterdienstes**. Deutscher Wetterdienst. <http://www.dwd.de/lexikon>. Version: 2012. – Abrufdatum: 31.05.2012
- [Ertel 1942] ERTEL, H.: **Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz**. In: *Meteorologische Zeitschrift* **59** (1942), S. 271–281
- [Harr *et al.* 2006] HARR, P. A. ; ANWENDER, D. ; JONES, S. C.: **Predictability associated with the downstream impacts of the extratropical transition of tropical cyclones**. In: *Preprints 27th Conference on Hurricanes and Tropical Meteorology* Monterey, 24-28 April 2006. American Meteorological Society: Boston, 2006
- [Harr *et al.* 2008] HARR, P. A. ; ANWENDER, D. ; JONES, S. C.: **Predictability associated with the downstream impacts of the extratropical transition of tropical cyclones: Methodology and a case study of Typhoon Nabi (2005)**. In: *Monthly Weather Review* **136** (2008), S. 3205–3225

- [Holton 2004] HOLTON, J. R.: *An Introduction to Dynamic Meteorology*. 4th edition. Elsevier Academic Press, 2004
- [Hoskins & Berrisford 1988] HOSKINS, B. J. ; BERRISFORD, P.: **A potential vorticity view of the storm of 15-16 October 1987**. In: *Weather* **43** (1988), S. 122–129
- [Hoskins *et al.* 1978] HOSKINS, B. J. ; DRAGHICI, I. ; DAVIES, H.C.: **A new look at the omega-equation**. In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **104** (1978)
- [Hoskins & Pedder 1980] HOSKINS, B. J. ; PEDDER, M. A.: **The diagnosis of middle latitude synoptic development**. In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **106** (1980), S. 707–719
- [Jones *et al.* 2003] JONES, S. C. ; HARR, P. A. ; ABRAHAM, J. ; BOSART, L. F. ; BOWYER, P. J. ; EVANS, J. L. ; HANLEY, D. E. ; HANSTRUM, B. N. ; HART, R. E. ; LALAURETTE, F. ; SINCLAIR, M. R. ; SMITH, R. K. ; THORNCROFT, C.: **The Extratropical Transition of Tropical Cyclones: Forecast Challenges, Current Understanding, and Future Directions**. In: *Weather and Forecasting* **18** (2003), S. 1052–1092
- [Jusem & Atlas 1998] JUSEM, J. C. ; ATLAS, R.: **Diagnostic Evaluation of Vertical Motion Forcing Mechanisms by Using Q-Vector Partitioning**. In: *Monthly Weather Review* **126** (1998), S. 2166–2184
- [Keyser *et al.* 1992] KEYSER, D. ; SCHMIDT, B. D. ; DUFFY, D. G.: **Quasi-geostrophic vertical motions diagnosed from along-isentrope and cross-isentrope components of the Q vector**. In: *Monthly Weather Review* **120** (1992), Nr. 5, S. 731–741
- [Klein *et al.* 2000] KLEIN, P. M. ; HARR, P. A. ; ELSBERRY, R. L.: **Extratropical transition of western North Pacific tropical cyclones: An overview and conceptual model of the transformation stage**. In: *Weather and Forecasting* **15** (2000), S. 373–396
- [Mallet *et al.* 1999] MALLET, I. ; CAMMAS, J.-P. ; MASCART, P. ; BECHTOLD, P.: **Effects of cloud diabatic heating on the early development of the FASTEX IOP 17 cyclone**. In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **125** (1999), S. 3439–3467
- [Margules 1904] MARGULES, M.: **Über die Beziehung zwischen Barometerschwankungen und Kontinuitätsgleichung**. In: BARTH, J. A. (Hrsg.): *Ludwig Boltzmann Festschrift*, 1904, S. 585–589
- [Martin 2006] MARTIN, J. E.: *Mid-Latitude Atmospheric Dynamics: A first course*. John Wiley & Sons Ltd, 2006
- [Martin 2007] MARTIN, J. E.: **Lower-tropospheric height tendencies associated with the shearwise and transverse components of quasi-geostrophic vertical motion**. In: *Monthly Weather Review* **135** (2007), S. 2803–2809
- [Pettersen & Smebye 1971] PETTERSEN, S. ; SMEBYE, S. J.: **On the development of extratropical cyclones**. In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **97** (1971), S. 457–482

- [Press *et al.* 2001] PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.: ***Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing***. 2nd. Cambridge University Press, 2001 <http://apps.nrbook.com/fortran/index.html>. – (Internet-Version: <http://apps.nrbook.com/fortran/index.html>, Abrufdatum: 14.02.2012)
- [Riemer & Jones 2010] RIEMER, M. ; JONES, S. C.: **The downstream impact of tropical cyclones on a developing baroclinic wave in idealized scenarios of extratropical transition**. In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **136 (Part A)** (2010), April, S. 617–637
- [Riemer *et al.* 2007] RIEMER, M. ; JONES, S. C. ; DAVIS, C. A.: ***Außertropische Umwandlung tropischer Wirbelstürme: Einfluss auf das Strömungsmuster in den mittleren Breiten***. DACH-Tagung, 2007
- [Riemer *et al.* 2008] RIEMER, M. ; JONES, S. C. ; DAVIS, C. A.: **The impact of extratropical transition on the downstream flow: An idealized modelling study with a straight jet**. In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **134** (2008), S. 69–91
- [Rotunno *et al.* 1994] ROTUNNO, R. ; SKAMAROCK, W. C. ; SNYDER, C.: **An Analysis of Frontogenesis in Numerical Simulations of Baroclinic Waves**. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* **51** (1994), Nr. 23, S. 3373–3398
- [Shapiro & Keyser 1990] SHAPIRO, M. A. ; KEYSER, D.: **Fronts, jet streams and the tropopause**. In: *Extratropical Cyclones, The Erik Palmén Memorial Volume* Amer. Meteor. Soc., Eds.: C. W. Newton and E. O. Holopainen, 1990, S. 167–191
- [Torn 2010] TORN, R. D.: **Diagnosis of the Downstream Ridging Associated with Extratropical Transition Using Short-Term Ensemble Forecasts**. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* **67** (2010), S. 817–833
- [Uccellini & Johnson 1979] UCCELLINI, L. W. ; JOHNSON, D. R.: **The Coupling of Upper and Lower Tropospheric Jet Streaks and Implications for the Development of Severe Convective Storms**. In: *Monthly Weather Review* **107** (1979), S. 682–703
- [Wirth 2007] WIRTH, V.: ***Atmospheric Dynamics***. Skript zur Vorlesung *Atmosphärische Strömungen I und II*, 2007

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, um mich bei einigen Menschen zu bedanken, die mir die Anfertigung dieser Diplomarbeit ermöglicht haben.

Zuerst bedanke ich mich sehr bei Dr. Michael Riemer, dessen jederzeit hervorragende Betreuung nicht besser hätte sein können. Vielen Dank, Michael!

Ebenso sehr bedanke ich mich bei Prof. Dr. Volkmar Wirth, der mir meinen Wunsch, diese Arbeit in seiner Arbeitsgruppe zu schreiben, erfüllt hat, und dessen Vorlesungen und Skripte mein Verständnis der theoretischen Meteorologie erheblich vertieft haben.

Ein ganz besonderer Dank gilt auch Dr. Jean-Pierre Cammas und Dr. Patrick Mascart vom *Laboratoire d'Aérodologie, Université de Toulouse* für die freundliche Zusendung ihrer eingescannten handschriftlichen Herleitungsnotizen zu ihrer AB-Omega-Gleichung.

Auch möchte ich allen Institutsmitgliedern und Mitstudenten danken, die mir im Verlaufe meines Studiums geholfen haben. Ich habe mich am *Institut für Physik der Atmosphäre* immer sehr wohl gefühlt, und das lag vor allem an den Menschen, denen ich dort begegnet bin. Insbesondere danke ich meinen Praktikumpartnerinnen und Praktikumpartnern Christiane Hofmann, Julia Schreiber, Florian Berkes und Oliver Schlenczek für die gute und freundschaftliche Zusammenarbeit.

Besonders danke ich auch meinen lieben Mitstudenten in Raum 417. Es war immer schön, mit Euch das Büro teilen zu dürfen!

Dann möchte ich mich sehr bei der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Manfred Wendisch (jetzt am *LIM, Universität Leipzig*) in ihrer Zusammensetzung während meiner dortigen Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskraft bedanken. Während dieser Zeit habe ich die für diese Arbeit vielfach verwendete Visualisierungs-Software IDL näher kennengelernt und sehr schöne 3 Wochen auf den Kapverdischen Inseln – einer typischen Entstehungsregion tropischer Wirbelstürme – im Rahmen der Messkampagne SAMUM II verbracht.

Schließlich danke ich allen meinen Freunden und Verwandten, die während der Dauer meines Studiums immer für mich da waren. Meinem Bruder André und seiner Frau Christina danke ich sehr für die vielen ermutigenden Gespräche. Ihrer kleinen Tochter, meiner Nichte Mathilda danke ich ganz besonders für die vielen Aufheiterungen während ihres spannenden “Umwandlungsprozesses” vom Baby- zum Kleinkind-Stadium.

Ein ganz besonderes Anliegen ist es mir, meinen Eltern zu danken, die mir durch Ihre finanzielle und menschliche Unterstützung mein Studium ermöglicht haben. Für dieses Geschenk danke ich Euch sehr!

Vielen Dank Euch allen!